СТАЦИОНАРЫ И ЦИКЛЫ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Р. З. Абдуллин

Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Информация о статье

Дата поступления

2 июня 2017 г.

Дата принятия к печати

20 ноября 2017 г.

Дата онлайн-размещения

27 ноября 2017 г.

Ключевые слова

Разностное уравнение;
неподвижные точки;
циклы;
области притяжения

Аннотация

В статье рассматривается заданное на отрезке скалярное нелинейное разностное уравнение с разрывной правой частью. При условии единственности и различном расположении относительно точки разрыва притягивающих неподвижных точек функций, описывающих правую часть слева и справа от точки разрыва, установлены области их притяжения. При отсутствии неподвижных точек, непрерывности и монотонности функций, описывающих правую часть, получены условия существования притягивающих циклов с периодом два и больше двух. Показано, что для выпуклых или вогнутых функций области притяжения этих циклов совпадают с отрезком, на котором определено уравнение.

STEADY STATES AND CYCLES OF A DIFFERENCE EQUATION WITH DISCONTINUOUS RIGHTHAND SIDE

Rafael Z. Abdullin

Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation

Article info

Received

June 2, 2017

Accepted

November 20, 2017

Available online

November 27, 2017

Keywords

Difference equation; fixed
points; cycles; domains
of attraction

Abstract

The article examines a scalar nonlinear difference equation with discontinuous right hand side on the interval. Under the condition of uniqueness and different arrangement with respect to the discontinuity of the attracting fixed points of functions describing the right-hand side to the left and to the right of the discontinuity, the domains of their attraction are established. In the absence of fixed points, continuity, and monotonicity of functions describing the right-hand side, conditions are obtained for the existence of attracting cycles with a period of two or more than two. It is shown that for convex or concave functions the domains of attraction of these cycles coincide with the interval on which the equation is defined.

Существование притягивающих неподвижных точек и циклов, существование циклов различных периодов, бифуркация циклов, наличие перемешивающих аттракторов, хаотическое поведение решений скалярного разностного уравнения $x(n+1) = \varphi(x(n))$ с непрерывной правой частью достаточно глубоко исследованы в работах А. Н. Шарковского и его учеников [1], в трудах А. П. Шапиро и С. П. Луппова [2], Ю. М. Свирижева и Д. О. Логофета [3], М. В. Якобсона [4], Т.-J. Li и J. A. Yorke [5] и других авторов. Области притяжения неподвижных точек и существование циклов скалярного разностного уравнения с разрывной правой частью изучены слабо [6].

В данной работе для скалярного разностного уравнения с функцией $\varphi(x)$, имеющей одну точку разрыва x_p , определяются области притяжения неподвижных точек функций, определяющих правую часть уравнения справа и слева от точки разрыва, условия существования циклов и их области притяжения для различных случаев расположения неподвижных точек относительно точки переклечения.

Рассмотрим скалярное разностное уравнение с разрывной правой частью:

$$x(n+1) = \begin{cases} f_1(x(n)), & x(n) \leq x_p; \\ f_2(x(n)), & x(n) > x_p, \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $x_p = \text{const}$, $a < x_p < b$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции со значениями в (a, b) , $f_1(x_p) \neq f_2(x_p)$.

Функции $f_i(x)$ имеют на (a, b) по одной неподвижной точке x_i^* , $i = 1, 2$, которые удовлетворяют необходимым и достаточным условиям притяжения из работы А. Н. Шарковского «Разностные уравнения и их приложения» [1]:

$$\forall x \in [a, x_i^*) \quad f_i^2(x) > x, \quad \forall x \in (x_i^*, b] \quad f_i^2(x) < x. \quad (2)$$

Здесь и далее f_i^k — k -я итерация функции f_i , т. е. $f_i^0(x) = x$ и $f_i^1(x) = f_i(f_i^{-1}(x))$, f_i^{-1} — обратное к функции f_i отображение. У А. Н. Шарковского показано, что из (2) следует

$$\forall x \in [a, x_i^*) \quad f_i(x) > x, \quad \forall x \in (x_i^*, b] \quad f_i(x) < x. \quad (3)$$

Из доказательства достаточности условий (2) можно сформулировать несколько предположений.

Лемма 1. Если $f_i[a, b] \subset (a, b)$ и выполнены условия (2), то областью притяжения стационарной точки x_i^* разностного уравнения $x_i(n+1) = f_i(x_i(n))$ является отрезок $[a, b]$.

Для разностного уравнения (1) определим области притяжения $P(x_i^*)$ неподвижных точек x_i^* функций $f_i(x)$ при различном их расположении относительно точки переключения x_p , условия существования циклов некоторых периодов и области их притяжения.

Различное расположение неподвижных точек относительно точки разрыва с $x_1^* < x_p < x_2^*$.

Отрезок $[a, x_p]$ представим в виде $[a, x_p] = W \cup S$, где W — множество точек, из которых решения уравнения (1) на некотором шаге n попадают в $(x_p, b]$, $S = [a, x_p] \setminus W$ — множество точек, из которых решения уравнения (1) не покидают $[a, x_p]$ при любых $n \geq 0$.

Промежуток $(x_p, b]$ представим в виде $(x_p, b] = V \cup G$, где V — множество точек, из которых решения уравнения (1) на некотором шаге n попадают в отрезок $[a, x_p]$, $G = (x_p, b] \setminus V$ — множество точек, из которых решения уравнения (1) не покидают $(x_p, b]$ при любых $n \geq 0$.

Пусть W_0 — множество точек перехода из $[a, x_p]$ в $(x_p, b]$ за один шаг, а V_0 — множество точек перехода из $(x_p, b]$ в $[a, x_p]$ за один шаг, т. е. $W_0 = \{x \in [a, x_p] : f_1(x) > x_p\}$ и $V_0 = \{x \in (x_p, b] : f_2(x) \leq x_p\}$. Тогда

$$W = \bigcup_{k \geq 0} f_1^{-k} W_0, \quad V = \bigcup_{k \geq 0} f_2^{-k} V_0.$$

Прообразы $f_1^{-k} W_0$ и $f_2^{-k} V_0$ множеств W_0 и V_0 , а также их подмножеств рассматривают-

ся соответственно в промежутках $[a, x_p]$ и $(x_p, b]$. Множества S и G являются положительно инвариантными для уравнения (1).

Решения уравнения (1), начинающиеся в W при переходе в $(x_p, b]$, могут попасть в G или V , а решения, начинающиеся в V , при переходе в $[a, x_p]$ могут попасть в S или W . Поэтому множество W разобьем на два непересекающихся подмножества W_1^V и W_1^G по переходам V и G :

$$W_{1,0}^V = \{x \in W_0 : f_1(x) \in V\}; \quad W_1^V = \bigcup_{k \geq 0} f_1^{-k} W_{1,0}^V;$$

$$W_{1,0}^G = \{x \in W_0 : f_1(x) \in G\}; \quad W_1^G = \bigcup_{k \geq 0} f_1^{-k} W_{1,0}^G.$$

Множество V разобьем на два непересекающихся подмножества V_1^W и V_1^S по переходам в W и S :

$$V_{1,0}^W = \{x \in V_0 : f_2(x) \in W\}; \quad V_1^W = \bigcup_{k \geq 0} f_2^{-k} V_{1,0}^W;$$

$$V_{1,0}^S = \{x \in V_0 : f_2(x) \in S\}; \quad V_1^S = \bigcup_{k \geq 0} f_2^{-k} V_{1,0}^S.$$

Учитывая, что $V = V_1^W \cup V_1^S$ и $W = W_1^V \cup W_1^G$, множество W_1^V разобьем на непересекающиеся подмножества W_2^V и W_2^S по переходам в V_1^W и V_1^S , а множество V_1^W — на подмножества V_2^W и V_2^G по переходам в W_1^V и W_1^G :

$$W_{2,0}^V = \{x \in W_{1,0}^V : f_1(x) \in V_1^W\}; \quad W_2^V = \bigcup_{k \geq 0} f_1^{-k} W_{2,0}^V;$$

$$W_{2,0}^S = \{x \in W_{1,0}^V : f_1(x) \in V_1^S\}; \quad W_2^S = \bigcup_{k \geq 0} f_1^{-k} W_{2,0}^S;$$

$$V_{2,0}^W = \{x \in V_{1,0}^W : f_2(x) \in W_1^V\}; \quad V_2^W = \bigcup_{k \geq 0} f_2^{-k} V_{2,0}^W;$$

$$V_{2,0}^G = \{x \in V_{1,0}^W : f_2(x) \in W_1^G\}; \quad V_2^G = \bigcup_{k \geq 0} f_2^{-k} V_{2,0}^G.$$

Аналогичным образом продолжим процесс разбиения множеств W_i^V и V_i^W для $i \geq 2$. Тогда $W_i^V = W_{i+1}^V \cup W_{i+1}^{(G,S)}$ и $V_i^W = V_{i+1}^W \cup V_{i+1}^{(G,S)}$, где для нечетных i $W_{i+1}^{(G,S)} = W_{i+1}^S$ и $V_{i+1}^{(G,S)} = V_{i+1}^G$, а для четных i $W_{i+1}^{(G,S)} = W_{i+1}^G$ и $V_{i+1}^{(G,S)} = V_{i+1}^S$. По построению разбиений множеств W_i^V и V_i^W решения уравнения (1), начинающиеся в $W_i^{(G,S)}$, при i четном, попадают в S , а при i нечетном — в G ; решения из $V_i^{(G,S)}$ при i четном попадают в G , а при i нечетном — в S . Если при некотором i $W_1^V = \emptyset$ или $V_1^W = \emptyset$, то процесс разбиения завершается.

Пусть α_0 — наибольшее на отрезке $[a, x_p]$ решение уравнения $f_1(x) = x_p$, не являющееся точкой экстремума функции $f_1(x)$, если такого решения нет, то принимаем $\alpha_0 = a$. Пусть β_0 — наименьшее решение уравнения $f_2(x) = x_p$ на $(x_p, b]$, если такого решения нет, то принимаем $\beta_0 = b$.

Лемма 2. Если для уравнения (1) с $x_1^* < x_p < x_2^*$ выполняются условия (2), то $\alpha_0 < x_1^*$, $\beta_0 > x_p$, $[\alpha_0, x_p] \subset S$, $(x_p, \beta_0) \subset G$.

В силу леммы 1 и положительной инвариантности множеств S и G при $\alpha_0 < x_1^* < x_p < x_2^* < \beta_0$ решения уравнения (1), начинающиеся в S или попадающие в S , сходятся к x_1^* , а решения из G или попадающие в G сходятся к x_2^* , т. е. $S \subset P(x_1^*)$ и $G \subset P(x_2^*)$. Например, при $\alpha_0 = a$ имеем $W = \emptyset$, $S = [a, x_p]$, $P(x_1^*) = [a, x_p] \cup V$, $P(x_2^*) = G$; при $\beta_0 = b$ получаем $V = \emptyset$, $G = (x_p, b]$, $P(x_1^*) = S$, $P(x_2^*) = (x_p, b] \cup W$; из $\alpha_0 = a$ и $\beta_0 = b$ следует $W = \emptyset$, $V = \emptyset$ и $P(x_1^*) = [a, x_p]$, $P(x_2^*) = (x_p, b]$.

Введем множества точек α_i и β_i , $i \geq 1$. При этом α_i — наибольшее на $[a, \alpha_{i-1}]$ решение уравнения $f_1(x) = \beta_{i-1}$, если такого решения нет, примем $\alpha_i = a$; β_i — наименьшее на $[\beta_{i-1}, b]$ решение уравнения $f_2(x) = \alpha_{i-1}$, если такого решения нет, примем $\beta_i = b$. По построению $\alpha_i \geq a$, $\beta_i \leq b$ и $x_p > x_1^* > \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, $x_p < x_2^* < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$. Очевидно, что из конечности множества точек α_i следует конечность множества точек β_i , и наоборот.

Лемма 3. Пусть в уравнении (1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют по одной неподвижной точке x_1^* и x_2^* , $x_1^* < x_p < x_2^*$, для которых выполняются условия притяжения (2), $\alpha \neq a$ и на $[a, \alpha_0]$ $f_2 f_1(x) > x$ или $\beta_0 \neq b$ и на $(\beta_0, b]$ $f_1 f_2(x) < x$. Тогда множества точек α_i и β_i конечны.

Доказательство. Предположим противное — имеется бесконечное множество точек α_i . По их определению $a < \alpha_{i+1} < \alpha_i < \alpha_0$, следовательно, последовательность $\{\alpha_i\}$ сходится и пусть $\alpha^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i$. Тогда из $f_1(\alpha_i) = \beta_{i-1}$ и $f_2(\beta_{i-1}) = \alpha_{i-2}$ следует $f_2 f_1(\alpha_i) = \alpha_{i-2}$. Отсюда в силу непрерывности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получаем $f_2 f_1(\alpha^*) = \alpha^*$, что противоречит условию $f_2 f_1(x) > x$ на $[a, \alpha_0]$. Таким образом, при условиях леммы 3 множества точек α_i и β_i конечны.

Очевидно, при конечности множеств точек α_i и β_i наименьшее из α_i равно a , а наибольшее из β_i равно b и процесс разбиения множеств W_i^V, V_i^W завершается за конечное число шагов.

Теорема 1. Пусть для уравнения (1) неподвижные точки x_1^* и x_2^* удовлетворяют условиям притяжения (2) и $x_1^* < x_p < x_2^*$, на отрезке $[a, \alpha_0]$ выполняется неравенство $f_2 f_1(x) > x$ при $\alpha_0 \neq a$. Тогда, если выполняется неравенство

$$\alpha_k < \min_{[x_2^*, b]} f_2(x) \leq \alpha_{k-1}, \quad (4)$$

то $V_{k+1,0}^W = \emptyset$, $W_{k+2}^V = \emptyset$, $V_k^W = V_{k+1}^{(G,S)}$, $W_{k+1}^V = W_{k+2}^{(G,S)}$, и при k четном имеем

$$P(x_1^*) = S \cup V_1^S \cup W_2^S \cup \dots \\ \dots \cup V_{k-1}^S \cup W_k^S \cup V_k^W \cup W_{k+1}^V,$$

$$P(x_2^*) = [a, b] \setminus P(x_1^*), \quad (5)$$

а при нечетном k —

$$P(x_1^*) = S \cup V_1^S \cup W_2^S \cup \dots$$

$$\dots \cup V_k^S \cup W_{k+1}^S, \quad P(x_2^*) = [a, b] \setminus P(x_1^*). \quad (6)$$

Если выполняется неравенство

$$\beta_{k-1} < \max_{[a, x_1^*]} f_1(x) \leq \beta_k, \quad (7)$$

то $W_{k+1,0}^V = \emptyset$, $V_{k+2}^W = \emptyset$, $W_k^V = W_{k+1}^{(G,S)}$, $V_{k+1}^W = V_{k+2}^{(G,S)}$, и при k четном имеем $P(x_1^*) = S \cup V_1^S \cup W_2^S \cup \dots \cup V_{k-1}^S \cup W_k^S \cup V_{k+1}^S$, $P(x_2^*) = [a, b] \setminus P(x_1^*)$, а при нечетном k — $P(x_1^*) = S \cup V_1^S \cup W_2^S \cup \dots \cup V_{k-1}^S \cup V_k^S \cup W_k^V \cup V_{k+1}^W$, $P(x_2^*) = [a, b] \setminus P(x_1^*)$.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство (4). Тогда $\beta_{k+1} = b$ и $\beta_k < b$, отсюда и $f_1[a, b] \subset (a, b)$ следует $\alpha_{k+1} = a$. На (x_p, β_k) выполняется неравенство $f_2(x) > \alpha_{k-1}$, поэтому (x_p, β_k) состоит только из подмножеств множеств G , $V_1^{(G,S)}$, ..., $V_k^{(G,S)}$. На промежутке $[\beta_k, b]$ в силу (3) и (4) выполняется неравенство $\alpha_k < f_2(x) < x$. Так как на $(\alpha_k, x_p]$ $f_1(x) < \beta_{k-1}$, то $(\alpha_k, x_p]$ состоит только из подмножеств множеств S , $W_1^{(G,S)}$, ..., $W_{k-1}^{(G,S)}$, $W_k^{(G,S)}$. Отсюда следует, что из $[\beta_k, b]$ возможны переходы только в эти подмножества. Поэтому $V_{k+1,0}^V = \emptyset$ и $V_k^W = V_{k+1}^{(G,S)}$, а также $W_{k+2,0}^V = \emptyset$ и $W_{k+1}^V = W_{k+2}^{(G,S)}$. Отсюда по построению множеств $W_i^{(G,S)}$ и $V_i^{(G,S)}$ следует, что области притяжения $P(x_i^*)$ при выполнении условия (4) для четного k определяются как (5), а для нечетного k — как (6). Для случая выполнения условия (7) доказательство проводится аналогичным образом. Если условие (4) или (7) выполняется при $k = 0$, то, соответственно, принимается $\alpha_{k-1} = x_p$ или $\beta_{k-1} = x_p$.

При выполнении условий теоремы 1 наиболее простую структуру множества $S, G, W_i^{(G,S)}, W_i^V, V_i^{(G,S)}, V_i^W$, а значит, и области притяжения $P(x_i^*)$ имеют при условиях монотонности функций $f_1(x)$, а именно при $f_1(x)$, возрастающей на $[a, x_1^*]$, и $f_2(x)$, возрастающей на $[x_2^*, b]$, имеем $W = V = \emptyset$ и $P(x_1^*) = S = [a, x_p]$, $P(x_2^*) = G = (x_p, b]$. Для $f_1(x)$, убывающей на $[a, \alpha_0]$ с $\alpha_0 \neq a$, и $f_2(x)$, возрастающей на $[x_2^*, b]$, получаем $S = [\alpha_0, x_p]$, $G = (x_p, b]$, $W = W_0 = W_{1,0}^G = [a, \alpha_0)$ и $P(x_1^*) = [\alpha_0, x_p]$, $P(x_2^*) = [a, \alpha_0) \cup (x_p, b]$. При $f_1(x)$, возрастающей на $[a, x_1^*]$, и $f_2(x)$, убывающей на $[\beta_0, b]$ с $\beta_0 \neq b$, имеем $S = [a, x_p]$, $G = (x_p, b]$,

$V = V_0 = V_{1,0}^S = [\beta_0, b]$ и $P(x_1^*) = [a, x_p] \cup [\beta_0, b]$, $P(x_2^*) = (x_p, \beta_0)$. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ убывают соответственно на $[a, \alpha_0]$ с $\alpha_0 \neq a$ и $[\beta_0, b]$ с $\beta_0 \neq b$, то $S = [\alpha_0, x_p]$, $W = W_0 = [a, \alpha_0]$, $G = (x_p, \beta_0)$, $V = V_0 = [\beta_0, b]$:

$$W_i^{(G,S)} = W_{i,0}^{(G,S)} = \begin{cases} [\alpha_i, \alpha_{i-1}], & \text{при четных } i, \\ (\alpha_i, \alpha_{i-1}), & \text{при нечетных } i, \end{cases}$$

$$V_i^{(G,S)} = V_{i,0}^{(G,S)} = \begin{cases} [\beta_{i-1}, \beta_i], & \text{при нечетных } i, \\ (\beta_{i-1}, \beta_i), & \text{при четных } i, \end{cases}$$

В этом случае при выполнении условия (4) для четного k получаем

$$P(x_1^*) = [\alpha_0, x_p] \cup [\beta_0, \beta_1] \cup [\alpha_2, \alpha_1] \cup \dots$$

$$\dots \cup [\alpha_k, \alpha_{k-1}] \cup [\beta_k, b] \cup [a, \alpha_{k+1}],$$

для нечетного k —

$$P(x_1^*) = [\alpha_0, x_p] \cup [\beta_0, \beta_1] \cup [\alpha_2, \alpha_1] \cup \dots$$

$$\dots \cup [\beta_{k-1}, \beta_k] \cup [\alpha_{k+1}, \alpha_k],$$

$$P(x_2^*) = [a, b] \setminus P(x_1^*).$$

В рассматриваемом случае притягивающих неподвижных точек x_1^* и x_2^* с $x_1^* < x_p < x_2^*$ при нарушении условия $f_2 f_1(x) > x$ на $[a, \alpha_0]$ в уравнении (1) возможны циклы различных периодов. Существование циклов различных периодов связано с наличием неподвижных точек различных суперпозиций функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Рассмотрим, например, условия существования циклов периода 2.

Пусть в (1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, убывающие соответственно на $[a, \alpha_0]$ и $[\beta_0, b]$, условие $f_2 f_1(x) > x$ не выполняется на $[a, \alpha_0]$. В силу непрерывности и убывания $f_1(x)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0)$ имеет место неравенство $x_p < f_1(x) < \beta_0$. Следовательно, на $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0)$ выполняются неравенства $f_2 f_1(x) > x_p > \alpha_0 > x$. Если отображение $f_2 f_1$ имеет на $[a, \alpha_0]$ единственную неподвижную точку z , $f_2 f_1(z) = z$, то в силу предыдущего $f_2 f_1(x) > x$ на $[z, \alpha_0]$. Значит, z не является притягивающей неподвижной точкой отображения $f_2 f_1$. Если на $[a, z]$ выполняется неравенство $x < f_2 f_1(x) \leq z$, то z является полупритягивающей неподвижной точкой с левосторонней областью притяжения, равной $[a, z]$. Неподвижной точке z отображения $f_2 f_1$ соответствует цикл $\{z, f_1(z)\}$ периода 2 уравнения (1), к которому

при выполнении на $[a, z)$ условия $x < f_2 f_1(x) \leq z$ сходятся решения уравнения (1), начинающиеся в $[a, z) \cup (f_2^{-1}(z), b]$. Если на $[a, z)$ $f_2 f_1(x) < x$, то к этому циклу ни одно из других решений уравнения (1) не сходится. Если отображение $f_2 f_1$ на $[a, \alpha_0]$ имеет несколько неподвижных точек, то часть из них может обладать свойством притяжения или полупритяжения и соответствующие им циклы периода 2 уравнения (1) будут иметь непустые области притяжения. Следует отметить, что при функциях $f_1(x)$ и $f_2(x)$, убывающих соответственно на $[a, \alpha_0]$ и $[\beta_0, b]$, при невыполнении условия $f_2 f_1(x) > x$ на $[a, \alpha_0]$ в уравнении (1) возможны только циклы периода 2. Существование у уравнения (1) циклов, например, периода 3 связано с наличием неподвижных точек отображения $f_1^2 f_2$, при этом могут существовать и циклы периода 2.

Отсутствие неподвижных точек с $f_1(x) > x$ на $[a, x_p]$ и $f_2(x) < x$ на $[x_p, b]$. В этом случае в силу непрерывности $f_i(x)$ и $f_i[a, b] \subset (a, b)$ функция $f_1(x)$ имеет неподвижные точки в (x_p, b) , а функция $f_2(x)$ — в (a, x_p) . Пусть множества W_0 , W , V_0 , V и числа α_0 , β_0 имеют прежний смысл. Число α_i определяется как наибольшее на $[a, \alpha_{i-1}]$ решение уравнения $f_i(x) = \alpha_{i-1}$, а число β_i — как наименьшее на $(\beta_{i-1}, b]$ решение уравнения $f_2(x) = \beta_{i-1}$, если таких решений нет, то, соответственно, принимаем $\alpha_i = a$, $\beta_i = b$. Строение промежутков $[a, x_p]$ и $(x_p, b]$ по переходам в W_0 и V_0 определяет следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть в уравнении (1) функции $f_i(x)$ непрерывны на $[a, b]$, $f_i[a, b] \subset (a, b)$, $f_1(x) > x$ на $[a, x_p]$ и $f_2(x) < x$ на $[x_p, b]$. Тогда

$$[a, x_p] = \bigcup_{i=0}^{k+1} f_1^{-i} W_0,$$

где k определяется неравенством $\alpha_k < \min_{[a, x_p]} f_1(x) \leq \alpha_{k-1}$ и каждое $f_1^{-(i-1)} W_0$ содержит промежуток, расположенный правее $f_1^{-i} W_0$;

$$(x_p, b] = \bigcup_{i=0}^{m+1} f_2^{-i} V_0,$$

где m определяется неравенством $\beta_{m-1} < \max_{[x_p, b]} f_2(x) \leq \beta_m$ и каждое $f_2^{-(i-1)} V_0$ содержит промежуток, расположенный левее $f_2^{-i} V_0$.

Из этого утверждения следует, что множества чисел α_i и β_i конечны. Простейшую структуру промежутки $[a, x_p]$ и $(x_p, b]$ имеют для монотонных функ-

ций $f_i(x)$. Например, если $f_1(x)$ возрастает на $[a, x_p]$ и $f_1(a) < x_p$, то $W_0 = (\alpha_0, x_p]$, $f_1^{-i}W_0 = (\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, k+1$, $\alpha_{k+1} = a$ и $[a, x_p] = [a, \alpha_k] \cup (\alpha_k, \alpha_{k+1}] \cup \dots \cup (\alpha_0, x_p]$. Если $f_2(x)$ возрастает на $[x_p, b]$ и $f_2(b) > x_p$, то $V_0 = (x_p, \beta_0]$, $f_2^{-i}V_0 = (\beta_{i-1}, \beta_i]$, $i = 1, 2, \dots, m+1$, $\beta_{m+1} = b$ и $(x_p, b] = (x_p, \beta_0] \cup (\beta_0, \beta_1] \cup \dots \cup (\beta_m, b]$.

Знание структуры промежутков $[a, x_p]$ и $(x_p, b]$ позволяет определить условия наличия в (1) циклов различных периодов. Пусть η_i наименьшее на $[x_p, b]$ решение уравнения $f_2(x) = \alpha_i$.

Теорема 2. Пусть в (1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывные и возрастающие соответственно на $[a, x_p]$ и $[x_p, b]$, на $[a, x_p]$ $f_1(x) > x$, на $[x_p, b]$ $f_2(x) < x$. Тогда при выполнении неравенств

$$f_1(x_p) \leq \beta_0, \quad f_2(x_p) > \alpha_0 \quad (8)$$

в (1) существуют только циклы $\{\gamma, f_1(\gamma)\}$ периода 2, где γ — неподвижные точки отображения $f_2 f_1$ на $(\alpha_0, x_p]$. Если при некотором i выполняются неравенства

$$f_1(x_p) \leq \eta_i, \quad \alpha_{i+1} \leq f_2(x_p) < \alpha_i \quad (9)$$

то в (1) существуют только циклы $\{\gamma, f_1(\gamma), f_2 f_1(\gamma), f_1 f_2 f_1(\gamma), \dots, f_1^i f_2 f_1(\gamma)\}$ периода $i+3$, где γ — неподвижные точки отображения $f_1^{i+1} f_2 f_1$ на $(\alpha_0, x_p]$. Если отображение $f_2 f_1$ или $f_1^{i+1} f_2 f_1$ имеет на $(\alpha_0, x_p]$ единственную неподвижную точку γ , то соответствующие циклы притягивающие и их областью притяжения является отрезок $[a, b]$.

Доказательство. Проведем его только для случая выполнения неравенств (9). При выполнении условий (8) доказательство проводится по аналогичной схеме. Пусть выполнено условие (9). В силу возрастания $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно на $[a, x_p]$ и $[x_p, b]$ их суперпозиция $f_1^{i+1} f_2 f_1$, также возрастающая функция на $[\alpha_0, x_p]$. Рассмотрим отображение $f_1^{i+1} f_2 f_1$ в точках α_0 и x_p . По условиям утверждения $x_p < f_1(x_p) \leq \eta_i$. Из возрастания $f_2(x)$ имеем $f_2 f_1(x_p) \leq f_2(\eta_i) = \alpha_i$, отсюда по возрастанию $f_1(x)$ получаем цепочку неравенств

$f_1 f_2 f_1(x_p) \leq f_1(\alpha_i) = \alpha_{i+1}, \dots, f_1^{i+1} f_2 f_1(x_p) \leq f_1(\alpha_0) = x_p$, т. е. $f_1^{i+1} f_2 f_1(x_p) \leq x_p$. Из $\alpha_{i+1} \leq f_2(x_p) < \alpha_i$ в силу возрастания $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получаем цепочку неравенств $\alpha_i = f_1(\alpha_{i+1}) \leq f_1 f_2(x_p)$, $\alpha_{i-1} = f_1(\alpha_i) \leq f_1^2 f_2(x_p), \dots, \alpha_0 = f_1(\alpha_1) \leq f_1^{i+1} f_2(x_p)$.

Отсюда с учетом $x_p = f_1(\alpha_0)$ имеет место неравенство $\alpha_0 \leq f_1^{i+1} f_2 f_1(\alpha_0)$. В силу леммы 4 решения из $[a, x_p]$ или начинаются в $W_0 = (\alpha_0, x_p]$, или попадают в W_0 за конечное число шагов. Для любых $x \in (\alpha_0, x_p]$ в силу возрастания $f_1^{i+1} f_2 f_1$ имеет место неравенство $\alpha_0 < f_1^{i+1} f_2 f_1(x) \leq x_p$. Из непрерывности и возрастания отображения $f_1^{i+1} f_2 f_1$ на $[\alpha_0, x_p]$ и неравенств $\alpha_0 \leq f_1^{i+1} f_2 f_1(\alpha_0)$, $f_1^{i+1} f_2 f_1(x_p) \leq x_p$ следует, что при выполнении условий (9) это отображение имеет на $(\alpha_0, x_p]$ неподвижные точки γ . Следовательно, в уравнении (1) существуют циклы $\{\gamma, f_1(\gamma), f_2 f_1(\gamma), f_1 f_2 f_1(\gamma), \dots, f_1^i f_2 f_1(\gamma)\}$ периода $i+3$. Если отображение $f_1^{i+1} f_2 f_1$ имеет единственную неподвижную точку, то в силу перечисленных его свойств этот цикл является притягивающим с областью притяжения, равной отрезку $[a, b]$.

Следствие 1. Пусть для уравнения (1) выполнены условия теоремы 2, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ выпуклые (вогнутые) функции соответственно на $[a, x_p]$ и $[x_p, b]$. Тогда при выполнении неравенств (8) уравнение (1) имеет единственный цикл $\{\gamma, f_1(\gamma)\}$, который является притягивающим на всем отрезке $[a, b]$. При выполнении неравенств (9) уравнение (1) имеет единственный цикл $\{\gamma, f_1(\gamma), f_2 f_1(\gamma), f_1 f_2 f_1(\gamma), \dots, f_1^i f_2 f_1(\gamma)\}$, который является притягивающим на всем отрезке $[a, b]$.

Теорема 3. Пусть в уравнении (1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывные и убывающие соответственно на $[a, x_p]$ и $[x_p, b]$, $f_1(x_p) > x_p$, $f_2(x_p) < x_p$, $f_1(a) < b$ и $f_2(b) > a$, тогда это уравнение имеет только циклы $\{\gamma, f_1(\gamma)\}$ периода 2, где γ — неподвижная точка отображения $f_2 f_1$ на $[a, x_p]$. Если при этом функция $f_1(x)$ выпуклая (вогнутая) на $[a, x_p]$, а $f_2(x)$ — вогнутая (выпуклая) на $[x_p, b]$, то такой цикл единственный и его областью притяжения является отрезок $[a, b]$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарковский А. Н. Разностные уравнения и их приложения / А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко. — Киев : Наукова думка, 1986. — 280 с.
2. Шапиро А. П. Рекуррентные уравнения в популяционной биологии / А. П. Шапиро, С. П. Луппов. — М. : Наука, 1983. — 133 с.
3. Свирижев Ю. М. Устойчивость биологических сообществ / Ю. М. Свирижев, Д. О. Логофет. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
4. Якобсон М. В. О свойствах динамических систем, порождаемых отображениями вида $x \rightarrow A x e^{-x}$ / М. В. Якобсон // Моделирование биологических сообществ : сб. ст. / отв. ред. А. П. Шапиро. — Владивосток : Изд-во Дальневост. науч. центра АН СССР, 1975. — С. 141–162.

5. Li T.-J. Period three implies chaos / T.-J. Li, J. A. Yorke // *American Mathematical Monthly*. — 1975. — Vol. 82, № 10. — P. 982–985.

6. Абдуллин Р. З. Области притяжения стационаров разностного уравнения с переключениями / Р. З. Абдуллин // *Автоматика и телемеханика*. — 2008. — № 3. — С. 126–134.

REFERENCES

1. Sharkovskii A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu. *Raznostnye uravneniya i ikh prilozheniya* [Difference Equations and Their Applications]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1986. 280 p.

2. Shapiro A. P., Luppov S. P. *Rekurrentnye uravneniya v populyatsionnoi biologii* [Recurrence Equations in Population Biology]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 133 p.

3. Svirezhev Yu. M., Logofet D. O. *Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv* [Stability of Biological Communities]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p.

4. Yakobson M. V. On Properties of Dynamical Systems Generated by the Mapping $x \rightarrow Ax e^{-x}$. In Shapiro A. P. (ed.). *Modelirovanie biologicheskikh soobshchestv* [Modelling of Biological Communities]. Vladivostok, The Far-Eastern Scientific Centre of the Academy of Sciences of the USSR Publ., 1975, pp. 141–162. (In Russian).

5. Li T.-J., Yorke J. A. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 1975, vol. 82, no. 10, pp. 982–985.

6. Abdullin R. Z. Attraction domains of the stationary points of the difference equation with switchings. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2008, no. 3, pp. 126–134. (In Russian).

Информация об авторе

Абдуллин Рафаэль Зинатович — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и эконометрики, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: abdullin-rz@bgu.ru.

Author

Rafael Z. Abdullin — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: abdullin-rz@bgu.ru.

Для цитирования

Абдуллин Р. З. Стационары и циклы разностного уравнения с разрывной правой частью / Р. З. Абдуллин // *Известия Байкальского государственного университета*. — 2017. — Т. 27, № 4. — С. 594–599. — DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(4).594-599.

For citation

Abdullin R. Z. Steady States and Cycles of a Difference Equation with Discontinuous Righthand Side. *Izvestiya Baykal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2017, vol. 27, no. 4, pp. 594–599. DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(4).594-599. (In Russian).