УДК 517.977 DOI 10.17150/2500-2759.2019.29(1).107-112

ВНЕШНИЕ ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Г.В. Сидоренко
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Информация о статье
Дата поступления
18 января 2019 г.

Дата принятия к печати
12 марта 2019 г.

Дата онлайн-размещения
4 апреля 2019 г.

Ключевые слова
Нелинейные дискретные системы; множество достижимости; внешние оценки множества достижимости; квадратичные внешние оценки множества достижимости нелинейных дискретных систем; принцип расширения; системный анализ; принятие решений

Аннотация
С одной стороны, нелинейные дискретные системы есть естественное обобщение линейных дискретных систем, с другой стороны, различные экономические и тем более технические системы имеют в принципе нелинейную природу. Поэтому исследование математических моделей таких систем — задача вполне актуальная при проведении различных процедур системного анализа и принятия решений. Пучки траекторий данных систем могут порождаться как параметрами, трактуемыми в качестве управлений, так и параметрами, трактуемыми как возмущения. В работе предлагаются достаточно общие результаты оценивания множества достижимости нелинейных дискретных систем, имеющие в качестве следствия ряд известных результатов в данной области. В качестве конкретизации этих подходов получены квадратичные оценки множества достижимости нелинейных дискретных систем.

EXTERNAL ESTIMATORS OF THE REACHABILITY SET OF NONLINEAR DISCRETE SYSTEMS

Gennady V. Sidorenko
Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation

Article info
Received
January 18, 2019

Accepted
March 12, 2019

Available online
April 4, 2019

Keywords
Nonlinear discrete systems; a reachability set; an external estimator of a reachability set; quadratic external estimators of a reachability set of nonlinear discrete systems; principle of expansion; systems analysis; decision making

Abstract
On the one hand, nonlinear discrete systems are natural generalization of linear discrete systems. On the other hand, various economic and, especially, technical systems have, basically, a nonlinear nature. Therefore, research of mathematical models of these systems is a relevant issue for implementing various procedures of systems analysis and decision making. Clusters of trajectories of the considered systems can be generated both by the parameters interpreted as control circuits, and by the parameters interpreted as perturbations. Quite general results of reachability sets estimation of nonlinear discrete systems, including a number of well-known achievements in this field as a consequence, are offered. As specification of these approaches, quadratic estimators of the reachability set of nonlinear discrete systems are received.

В динамической оптимизации типична постановка задачи управления для системы, состояние которой описывается при помощи дискретного процесса [1–10]. Более того, например, в экономике для многих задач планирования, организации и размещения производства этот подход является общепринятым [8–10]. То есть динамика

Известия Байкальского государственного университета. 2019. Т. 29, № 1. С. 107–112

объекта описывается в виде дискретного включения

$$x(t_{i+1}) \in V(t_i, x(t_i)),\ i = 0, 1, 2, \ldots, k-1, \quad (1)$$

$$t_0 < t_1 < K < t_k,\ T = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}.$$

Вектор $x(t_i) \in R^n$ характеризует состояние объекта в момент $t_i \in T$. Как правило, для системы (1) задаются начальные условия

$$x(t_0) \in X_0. \quad (2)$$

Качество каждого процесса $\{x(t_i)\}$, $i = \overline{0, k}$, удовлетворяющего включениям (1), (2), можно характеризовать при помощи функционала

$$I = F(x(t_k)) + \sum_{i=0}^{k-1} f_i(t_i, x(t_i)).$$

Методы оптимизации функционала I, основанные на принципах оптимальности Беллмана — Кротова, известны [5]. Однако заметим, в реальных системах как сама модель (1), так и функционал I являются объектами, определяемыми приближенно. Трудно построить совершенно точную модель, т.е. указать вид множества $V(t, x)$, тем более не очевиден выбор критерия качества I, оптимизация которого определяет стратегию развития. Поэтому естественно иметь представление обо всех возможных состояниях системы (1), (2) в каждый момент $t_i \in T$ и на основании этого судить об адекватности модели и выборе приемлемых критериев качества. Таким образом, встает вопрос о построении множества достижимости системы (1), (2), полностью определяющего динамику модели.

Формально, в силу дискретности включения (1), множество достижимости выписать можно:

$$X_D(t_i) = X_D(t_{i-1}) + \sum_{x \in X_D(t_{i-1})} V(t_i, x),\ X_D(t_0) = X_0.$$

Однако реально это построение трудноосуществимо. С ростом i процесс построения множеств $X_D(t_i)$ всё более и более затруднителен. В силу этого естественно рассматривать некоторые аппроксимации множества достижимости. Они не дают точного представления $X_D(t_i)$, но более конструктивны в смысле построения. Тогда и задачу оптимизации функционала I также следует рассматривать на аппроксимациях множества достижимости, что будет давать приближенное решение, более эффективно находимое. Более того, традиционно построение приближенных решений задачи оптимизации всегда сопровождается различными алгоритмами улучшения этого решения. В частности, данные алгоритмы могут быть нацелены как на глобальное уточнение аппроксимаций множества достижимости, так и на локальное, в окрестности некоторых точек.

В настоящей работе рассмотрим задачу построения аппроксимаций множества достижимости системы (1), (2). Определим соответствующие аппроксимации в виде внешних оценок множества достижимости, т.е. множеств $Y(t_i) \supset X_D(t_i)$, $i = \overline{1, k}$.

1. Внешние оценки множества достижимости нелинейных дискретных систем. Рассмотрим управляемую дискретную систему, заданную включениями (1), (2). Не уменьшая общности дальнейших рассуждений, будем считать множества X_0, $V(t, x)$, $(t, x) \in T \times R^n$ компактами. Пусть задано множество $X_* \subset R^n$, обладающее свойством $X_* \supset X_D(t), \forall t \in T$.

В частности, $X_* = R^n$.

Пусть $p \geq 1$ — некоторое целое число. Зададим набор функций $\varphi_1^j : T \times R^n \to R^1$, $j = \overline{1, p}$, и пусть функции $h_1^j : T \to R^1$, $j = \overline{1, p}$, $h_1 = (h_1^1, \ldots, h_1^p) \in R^p$. Введем следующие обозначения:

$$Y_1(t_i, h_1) = \{x \in R^n : \varphi_1^j(t_i, x) \leq h_1^j(t_i),\ j = \overline{1, p}\},$$

$$\xi_1^j(t_i, h\} = \sup_{x \in Y_1(t_i, h_1)} \max_{v \in V(t_i, x)} [\varphi_1^j(t_{i+1}, v) - \varphi_1^j(t_i, x)],$$

$$i = \overline{0, k-1},\ j = \overline{1, p},\ \xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^p) \in R^p.$$

Тогда достаточно общий результат, определяющий внешние оценки множества достижимости нелинейных дискретных систем, можно представить в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $h_1(t)$, $t \in T$ удовлетворяет соотношениям*

$$h_1(t_{i+1}) = h_1(t_i) + \xi_1(t_i, h(t_i)),\ i = \overline{0, k-1}, \quad (3)$$

$$h_1^j(t_0) = \max_{x \in X_0} \varphi_1^j(t_0, x),\ j = \overline{1, p}. \quad (4)$$

Тогда для каждого $t \in T$ множество $Y_1(t, h_1(t))$ есть внешняя оценка множества достижимости системы (1), (2).

На самом деле. Пусть $\{x(t_i)\}$, $i = \overline{0, k}$ — произвольная траектория системы (1), (2), $t_s \in T$ — некоторый момент времени. Покажем, что $x(t_s) \in Y_1(t_s, h_1(t_s))$. Решение начальной задачи (3), (4) в момент $t_s \in T$ можем записать в виде

ISSN 2500-2759

Bulletin of Baikal State University, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 107–112

$$h_1^j(t_s) = h_1^j(t_0) + \sum_{t=0}^{s-1}\xi_1^j(t_i, h_1^j(t_i)) = \max_{x\in X_0} \varphi_1^j(t_0, x) +$$

$$+\sum_{i=0}^{s-1} \sup_{x\in Y_1(t_i,h_1(t_i))} \max_{v\in V(t_i,x)} [\varphi_1^j(t_{i+1}, v) - \varphi_1^j(t_i, x)],\ j=\overline{1,p}.$$

Тогда вдоль траектории $\{x(t_i)\}$, $i=\overline{0,s}$ имеем неравенства

$$h_1^j(t_s) \ge \varphi_1^j(t_0, x(t_0)) + \sum_{i=0}^{s-1}[\varphi_1^j(t_{i+1}, x(t_{i+1})) - \varphi_1^j(t_i, x(t_i))] =$$

$$= \varphi_1^j(t_0, x(t_0)) + \varphi_1^j(t_s, x(t_s)) - \varphi_1^j(t_0, x(t_0)) =$$

$$= \varphi_1^j(t_s, x(t_s)),\ j=\overline{1,p}.$$

Следовательно, $x(t_s) \in Y_1(t_s,\ h_1(t_s))$. Таким образом, в силу произвольности траектории $\{x(t_s)\}$, $i=\overline{0,k}$, $X_D(t_s) \subset Y_1(t, h(t_s))$ для любого $t_s \in T$.

В качестве следствия из данной теоремы можно получить более простой, но менее общий результат, известный и ранее [4].

Следствие 1.1. *Пусть*

$$\mu^j(t_i) = \sup_{x\in R^n} \max_{v\in V(t_i,x)} [\varphi_1^j(t_{i+1}, v) - \varphi_1^j(t_i, x)],$$

$$i=\overline{0,k-1},\ j=\overline{1,p}.$$

Тогда множество

$$Y(t_s) = \{x\in R^n\colon \varphi_1^j(t_s, x) \le \max_{x\in X_0} \varphi_1^j(t_0, x) +$$

$$+\sum_{i=0}^{s-1}\mu_1^j(t_i),\ j=\overline{1,p}$$

есть внешняя оценка множества достижимости системы (*1*), (*2*) *в момент* $t_s \in T$.

Действительно. Из определения функции $\xi_1^j(t_i, h)$ следует неравенство $\mu^j(t_i) \ge \xi_1^j(t_i, h)$ для всех $(t_i,\ h) \in T \times R^n$. Рассмотрим рекуррентную цепочку

$$\bar{h}(t_{i+1}) = \bar{h}(t_i) + \mu(t_i),\ i = \overline{0,k-1}$$

с начальным условием (4). Тогда из соотношения (3) следует, что $\bar{h}(t) \ge h_1(t)$, $t\in T$. Отсюда имеем включение $Y_1(t, h(t)) \subset Y_1(t, \bar{h}(t))$, т.е. по теореме 1 множество $Y_1(t, \bar{h}(t))$ есть внешняя оценка множества достижимости системы (1), (2). Для произвольного $t_s \in T$ имеем

$$\bar{h}^j(t_s) = \max_{x\in X_0}\varphi_1^j(t_0, x) + \sum_{i=0}^{s-1}\mu^j(t_i),\ j=\overline{1,p}.$$

Часто, особенно при решении задач оптимизации [5–7], дискретные системы рассматриваются в «обратном» времени:

$$x(t_{i-1}) \in V(t_i, x(t_i)),\ \ i = k, k-1, \dots, 1, \qquad (5)$$

$$x(t_k) \in X_*, \qquad (6)$$

где X_* — множество, определяемое параметрами или методом решения оптимизационной задачи, либо некоторая априори известная множества достижимости системы (1), (2), в частности из теоремы 1.

Построим для системы (5), (6) внешние оценки множества достижимости. Отметим, что если X_* определяется из решения оптимизационной задачи, то полученная оценка будет являться внешней оценкой графиков всех траекторий системы (1), (2), приводящих в множество X_* и, вообще говоря, не будет внешней оценкой множества достижимости системы (1), (2). Поэтому будем обозначать множество достижимости системы (5), (6) через $X^*_D(t)$.

Зададим два набора дискретных функций: $\varphi_2^j: T\times R^n \to R^1$, $h_2^j: T\to R^1$, $j=\overline{1,p}$. Определим с их помощью следующие множество и функции:

$$Y_2(t_i, h_2) = \{x\in R^n : \varphi_2^j(t_i, x) \ge h_2^j(t_i),\ \ j=\overline{1,p}\},$$

$$\xi_2^j(t_i h_2) = \inf_{x\in Y_2(t_i,h_2)} \min_{v\in V(t_i,x)} [\varphi_2^j(t_{i-1}, v) - \varphi_2^j(t_i, x)],$$

$$i = k, k-1, \dots, 1,\ j = \overline{1,p},\ \xi_2 = (\xi_2^1,\ \xi_2^2, \dots,\ \xi_2^p) \in R^p.$$

Теорема 2. *Пусть вектор-функция* $h_2(t)$, $t\in T$ *удовлетворяет соотношениям*

$$h_2(t_{i-1}) = h_2(t_i) + \xi_2(t_i, h_2(t_i)),\ i = k, k-1, \dots, 1, \qquad (7)$$

$$h_2^j(t_k) = \inf_{x\in X_*}\varphi_2^j(t_k, x),\quad j = \overline{1,p}. \qquad (8)$$

Тогда множество $Y_2(t,\ h_2(t))$, $t\in T$ *есть внешняя оценка множества достижимости системы* (*5*), (*6*).

Покажем это. Пусть $\{x(t_i)\}$, $i = k,\ k-1, \dots, 0$ — произвольная траектория системы (5), (6), $t_s \in T$ — произвольный момент времени. Из соотношений (7), (8) следует

$$h_2^j(t_s) = h_2^j(t_k) + \sum_{i=s+1}^{k}\xi_2^j(t_i, h_2(t_i)) \le \varphi_2^j(t_k, x(t_k)) +$$

$$+\sum_{i=s+1}^{k}[\varphi_2^j(t_{i-1}, x(i_{i-1})) - \varphi_2^j(t_i, x(t_i))] = \varphi_2^j(t_s, x(t_s)).$$

Тогда $x(t_s) \in Y_2(t,\ h_2(t_s))$ и в силу произвольности траектории $\{x(t_i)\}$, $i = k,\ k-1, \dots, 0$ имеем включение $X_D(t_s) \subset Y_2(t_s,\ h_2(t_s))$ для любого $t_s \in T$.

Формы внешних оценок множества достижимости (но не сами они) по теоремам 1 и 2 совпадают, когда функции $\varphi^j(t, x)$, $j=\overline{1,p}$, задающие внешние оценки, отличаются знаком. Если функции $\varphi_1^j(t, x)$, $j=\overline{1,p}$ определяют некоторую внешнюю оценку, подсчитанную с использованием теоремы 1, то функции $\varphi_2^j(t,x) = -\varphi_1^j(t,x)$, $j=\overline{1,p}$ определяют

Известия Байкальского государственного университета. 2019. Т. 29, № 1. С. 107–112

ISSN 2500-2759

внешнюю оценку множества достижимости, построенную на основе теоремы 2, точно такой же формы и наоборот. Совместное использование теорем 1 и 2 позволяет получить более точную оценку $X_D(t)$ или уточнить уже имеющуюся.

Расшифруем теоремы 1 и 2 для конкретных классов оценивающих функций $\varphi^j(t,x)$, $j=\overline{1,p}$. Из приведенных выше рассуждений видна однотипность идей, заключенных в теоремах 1 и 2. Поэтому все дальнейшие результаты получим на основе теоремы 1, отмечая в качестве замечания необходимые модификации для теоремы 2.

2. Квадратичные внешние оценки множества достижимости нелинейных дискретных систем. Конкретизируем приведенные выше теоремы для построения квадратичных оценок множества достижимости, в частности эллипсоидальных. В теоремах 1 и 2 функции, определяющие внешние оценки, — произвольные. При построении оценок в заданном классе функций достаточно показать суть алгоритма на одном представителе этого класса, так как для других все отличается только индексом. Это упрощает изложение, но всегда нужно иметь в виду, что пересечение оценок заданного класса дает, как правило, оценку, не лежащую в этом классе. Таким образом, выберем одну квадратичную форму $\varphi(t, x) = x'\sigma(t)x$ и с ее помощью определим квадратичные оценки множества достижимости.

Определенности ради определим сразу эллипсоидальные оценки множества достижимости как наиболее отражающие суть дела, когда множество достижимости ограничено. В случае произвольных квадратичных оценок методология и рассуждения сохраняются. Зададим набор $\{\sigma(t_i)\}$, $i=\overline{0,k}$ симметричных положительно определенных $\sigma(t_i) > 0$ квадратных матриц порядка n. Из положительной определенности матриц $\sigma(t_i)$, $\forall t_i \in T$ следует, что получаемые оценки множества достижимости будут эллипсоидами.

Обозначим через

$$r_1^2(t_i,\sigma(t_{i+1}),\sigma(t_i),\gamma(t_i)) = \sup\,\{v'\sigma(t_{i+1})v \ : \ v\in V(t_i,x),$$
$$x'\sigma(t_i)x \le \gamma(t),\ \ i=\overline{0,k-1}\}.$$

Следствие 1.2. *Пусть функция $\gamma(t)$, $t\in T$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\gamma(t_{i+1}) = \gamma(t_i) + r_1^2(t_i,\sigma(t_{i+1}),\sigma(t_i),\gamma(t_i)),$$
$$\gamma(t_0) = \max_{x\in X_0} x'\sigma(t_0)x.$$

Тогда множество

$$Y_1(t_s,\gamma(t_s)) = \{x\in R^n : x'\sigma(t_s)x \le \gamma(t_s)\}$$

есть внешняя эллипсоидальная оценка множества достижимости системы (1), (2) в момент $t_s \in T$.

Убедимся в этом. Очевидно, для каждого $x\in R^n$, удовлетворяющего неравенству $x'\sigma(t_i)x \le \gamma(t_i)$, справедливо включение

$$V(t_i,x) \subset \{v\in R^n : v'\sigma(t_{i+1})v \le$$
$$\le r_1^2(t_i,\sigma(t_{i+1}),\sigma(t_i),\gamma(t_i))\} = E(t_i).$$

Оценим сверху скалярную функцию

$$\xi_1(t_i,\gamma(t_i)) = \sup_{x\in Y(t_i,\gamma(t_i))}\ \max_{v\in V(t_i,x)} [v'\sigma(t_{i+1})v -$$
$$- x'\sigma(t_i)x] \le \sup_{x\in Y(t_i,\gamma(t_i))}\ \max_{v\in V(t_i,x)} v'\sigma(t_{i+1})v -$$
$$- \inf_{x\in Y(t_i,\gamma(t_i))} x'\sigma(t_i)x = \sup_{x\in Y(t_i,\gamma(t_i))}\ \max_{v\in V(t_i,x)} v'\sigma(t_{i+1})v.$$

Так как $\sigma(t_i) > 0$ — положительно определенная матрица, то второе слагаемое в правой части данного неравенства равно нулю.

Используя включение $V(t_i,\ x) \subset E(t_i)$, оценку для $\xi_1(t_i,\gamma(t_i))$ можно усилить:

$$\xi_1(t_i,\gamma(t_i)) \le \sup_{v\in E(t_i)} v'\sigma(t_{i+1})v =$$
$$= r_1^2(t_i,\sigma(t_{i+1}),\sigma(t_i),\gamma(t_i)).$$

Тогда по теореме 1 функцию $\gamma(t)$, $t\in T$, найдем как решение рекуррентной цепочки

$$\gamma(t_{i+1}) = \gamma(t_i) + r_1^2(t_i,\sigma(t_{i+1}),\sigma(t_i),\gamma(t_i))$$

с начальным условием

$$\gamma(t_0) = \max_{x\in X_0} x'\sigma(t_0)x.$$

Отсюда следует, что множество $Y_1(t, \gamma(t)) = \{x\in R^n : x'\sigma(t)x \le \gamma(t)\}$ есть внешняя, а в силу положительной определенности матрицы $\sigma(t) > 0$ — эллипсоидальная оценка множества достижимости системы (1), (2) в момент $t\in T$.

Аналогичным образом, используя теорему 2, можно определить внешние эллипсоидальные оценки для системы (5), (6).

Пусть $\{\sigma(t_i)\}$, $i=\overline{0,k}$ — набор симметричных отрицательно определенных квадратных матриц порядка n, $\gamma(t_i)$, $i=\overline{0,k}$ — некоторая скалярная дискретно заданная функция. Обозначим

$$r_2^2(t_i,\sigma(t_{i-1}),\sigma(t_i),\gamma(t_i)) = \inf\{v'\sigma(t_{i-1})v : v\in$$
$$V(t_i,x),\ x'\sigma(t_i)x \ge \gamma(t_i)\},\ \ i=\overline{0,k}.$$

Следствие 2.1. *Пусть функция $\gamma(t_i)$, $i=\overline{0,k}$ удовлетворяет соотношениям*

Bulletin of Baikal State University, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 107–112

$$\gamma(t_{i-1}) = \gamma(t_i) + r_2^2(t_i, \sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i), \gamma(t_i)),$$

$$\gamma(t_k) = \inf_{x \in X.} x'\sigma(t_k)x.$$

Тогда множество

$$Y_2(t_s, \gamma(t_s)) = \{x \in R^n : x'\sigma(t_s)x \geq \gamma(t_s)\}$$

есть внешняя эллипсоидальная оценка множества достижимости системы (5), (6) в момент $t_s \in T$.

3. Пример. Построим, используя следствие 2.1, внешнюю эллипсоидальную оценку множества достижимости следующей системы:

$$x_1(t_{i+1}) = x_2(t_i)u(t_i),$$

$$x_2(t_{i+1}) = x_1(t_i) + x_2(t_i), \ t_i \in T = [0, 1, 2, 3],$$

$$x(t_0) \in X_0 = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

$$|u(t)| \leq 1.$$

Множество достижимости $X_D(t)$, $t \in T$ имеет вид

$$X_D(t_0) = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

$$X_D(t_1) = \{x \in R^2 : \frac{2}{u^2(t_0)}x_1^2 - \frac{2}{u(t_0)}x_1x_2 + x_2^2 \leq 1, \ |u(t_0)| \leq 1\},$$

$$X_D(t_2) = \{x \in R^2 : (\frac{2}{u^2(t_1)u^2(t_0)} + \frac{2}{u^2(t_1)u(t_0)} + \frac{1}{u^2(t_1)})x_1^2 + 2(\frac{2}{u(t_1)u^2(t_0)} + \frac{1}{u(t_1)u(t_0)})x_1x_2 + \frac{2}{u^2(t_0)}x_2^2 \leq 1, \ |u(t_0)| \leq 1, \ |u(t_1)| \leq 1\},$$

$$X_D(t_3) = \{x \in R^2 : N_{11}x_1^2 + 2N_{12}x_1x_2 + N_{22}x_2^2 \leq 1, |u(0)| \leq 1, \ |u(1)| \leq 1, \ |u(2)| \leq 1\}.$$

Коэффициенты N_{ij} имеют следующий вид:

$$N_{11} = \frac{2}{u^2(t_2)u^2(t_1)u^2(t_0)} + \frac{2}{u^2(t_2)u^2(t_1)u(t_0)} + \frac{1}{u^2(t_2)u^2(t_1)} + \frac{4}{u^2(t_2)u(t_1)u^2(t_0)} + \frac{2}{u^2(t_2)u(t_1)u(t_0)} + \frac{2}{u^2(t_2)u^2(t_0)},$$

$$N_{12} = -\frac{2}{u(t_2)u^2(t_1)u^2(t_0)} - \frac{2}{u(t_2)u^2(t_1)u(t_0)} - \frac{1}{u(t_2)u^2(t_1)} - \frac{2}{u(t_2)u(t_1)u^2(t_0)} - \frac{1}{u(t_2)u(t_1)u(t_0)},$$

$$N_{22} = \frac{2}{u^2(t_1)u^2(t_0)} + \frac{2}{u^2(t_1)u(t_0)} + \frac{1}{u^2(t_0)}.$$

Очевидна нарастающая громоздкость и сложность вычисления множества достижимости. Поэтому, отказываясь сразу от точного описания, построим аппроксимации множества достижимости в виде внешних эллипсоидальных оценок.

Оценочные эллипсоиды будем выбирать в виде кругов, т.е. положим: $\sigma(t_0) = \sigma(t_1) = \sigma(t_2) = \sigma(t_3) = E$, где E — единичная матрица.

Функция $r_1^2(t_i, \sigma(t_{i+1}), \sigma(t_i), \gamma(t_i) = r_1^2(\gamma(t_i))$ есть значение задачи математического программирования:

$$r_1^2(\gamma(t_i)) = \max\{x_2^2u^2 + (x_1 + x_2)^2 : |u| \leq 1, \ x_1^2 + x_2^2 \leq \gamma\} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\gamma(t_i) \approx 2.618\gamma(t_i).$$

При $t = 0$ параметр $\gamma(0) = \max\{x_1^2 + x_2^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} = 1$. Тогда, разрешая соотношения, определяющие $\gamma(t_i)$, получим: $\gamma(t_1) \approx\approx 3{,}618$, $\gamma(t_2) \approx 13{,}09$, $\gamma(t_3) \approx 47{,}36$. Отсюда следует, что внешние эллипсоидальные оценки множества достижимости, в данном случае в виде кругов, рассматриваемой системы имеют вид

$$X(t_0) = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \ X(t_1) = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 3.618\},$$

$$X(t_2) = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 13.09\},$$

$$X(t_3) = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 47.36\}.$$

Вычисления, которые потребовались для определения внешних оценок, несравнимо более простые, чем построение тех объединений эллипсоидов, что присутствуют в определении самих множеств достижимости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоренко Г.В. Квадратичные оценки состояния в линейных дискретных системах управления / Г.В. Сидоренко // Известия Байкальского государственного университета. — 2017. — Т. 27, № 2. — С. 281–285. — DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(2).281-285.

ISSN 2500-2759

2. Сидоренко Г.В. Оценка возможностей управляемых систем в дискретных моделях леонтьевского типа / Г.В. Сидоренко // Актуальные тенденции развития мировой экономики : материалы междунар. науч.-практ. конф., 15–16 марта 2016 г. : в 2 ч. — Иркутск, 2016. — Ч. 2. — С. 132–138.

3. Константинов Г.Н. Внешние оценки множеств достижимости управляемых систем / Г.Н. Константинов, Г.В. Сидоренко // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. — 1986. — № 3. — С. 28–34.

4. Константинов Г.Н. Нормирование воздействий на динамические системы / Г.Н. Константинов. — Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1983. — 188 с.

5. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления / В.И. Гурман. — М. : Наука, 1997. — 288 с.

6. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А.И. Пропой. — М. : Наука, 1973. — 256 с.

7. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. — М. : Наука, 1973. — 448 с.

8. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства / А.М. Рубинов. — Л. : Наука, 1983. — 187 с.

9. Макаров В.Л. Математическая теория экономической динамики и равновесия / В.Л. Макаров, А.М. Рубинов. — М. : Наука, 1973. — 336 с.

10. Красс И.А. Математические модели экономической динамики / И.А. Красс. — М. : Сов. радио, 1976. — 280 с.

REFERENCES

1. Sidorenko G.V. Square-law Assessments of a State in Linear Discrete Control Systems. *Izvestiya Baykal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 281–285. DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(2).281-285. (In Russian).

2. Sidorenko G.V. Rating of opportunies of controlled systems in discrete models such as Leontief. *Aktual'nye tendentsii razvitiya mirovoi ekonomiki. Materialy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Current Trends in the Development of World Economy. Materials of International Research Conference]. Irkutsk, Baikal State University Publ., 2016, vol. 2, pp. 132–138. (In Russian).

3. Konstantinov G.N., Sidorenko G.V. External Assessments of Attainabily Sets of Controlled Systems. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika = Herald of the USSR Academy of Sciences. Engineering Cybernetics*, 1986, no. 3, pp. 28–34. (In Russian).

4. Konstantinov G.N. *Normirovanie vozdeistvii na dinamicheskie sistemy* [Normalization of Effects on Dynamic Systems]. Irkutsk State University Publ., 1983. 188 p.

5. Gurman V.I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* [Extension Principle in Management Tasks]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 288 p.

6. Propoi A.I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* [Elements of the theory of optimal discrete processes]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 256 p.

7. Boltyansky V.G. *Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami* [Discreet Systems Optimum Control]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 446 p.

8. Rubinov A.M. *Matematicheskie modeli rasshirennogo vosproizvodstva* [Mathematical Models of the Expanded Reproduction Models]. Leningrad, Nauka Publ., 1983. 187 p.

9. Makarov V.L., Rubinov A.M. *Matematicheskaya teoriya ekonomicheskoi dinamiki i ravnovesiya* [Mathematical Theory of the Economic Dynamics and Equilibrium]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 336 p.

10. Krass I.A. *Matematicheskie modeli ekonomicheskoi dinamiki* [Mathematical Models of Economic Dynamics]. Moscow, Sovetskoye Radio Publ., 1976. 280 p.

Информация об авторе

Сидоренко Геннадий Васильевич — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и статистики, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: gennadijsidorenko@yandex.ru.

Author

Gennady V. Sidorenko — Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Statistics, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: gennadijsidorenko@yandex.ru.

Для цитирования

Сидоренко Г.В. Внешние оценки множества достижимости нелинейных дискретных систем / Г.В. Сидоренко // Известия Байкальского государственного университета. — 2019. — Т. 29, № 1. — С. 107–112. — DOI: 10.17150/2500-2759.2019.29(1).107-112.

For Citation

Sidorenko G.V. External Estimators of the Reachability Set of Nonlinear Discrete Systems. *Izvestiya Baikal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 107–112. DOI: 10.17150/2500-2759.2019.29(1).107-112. (In Russian).

ISSN 2500-2759