

## ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИЙ В ОСНОВНЫЕ ФОНДЫ НЕФТЯНОЙ КОМПАНИИ

**Н.В. Антипина**

*Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация*

### Информация о статье

Дата поступления  
17 февраля 2019 г.

Дата принятия к печати  
22 мая 2019 г.

Дата онлайн-размещения  
27 июня 2019 г.

### Ключевые слова

Рынок нефти; оптимальное управление; множественная регрессия; парная регрессия; качественный анализ

### Аннотация

Добыча и переработка нефти имеют огромное значение для состояния экономики Российской Федерации. Компании, занимающиеся этими видами деятельности, нуждаются в инструментах повышения эффективности своей работы. Предприятия нефтяной отрасли в России во многом сходны друг с другом и сталкиваются с одинаковыми проблемами. Изучение российского рынка нефти и его основных субъектов позволяет считать необходимость модернизации основных добывающих фондов одной из ключевых проблем российской нефтяной компании. В данной статье представлены постановка задачи оптимизации объема инвестиций в основные фонды ПАО «Татнефть», построение и качественный анализ соответствующей динамической модели. Для построения модели использованы эконометрические методы: на основе статистической информации о нефтяной компании «Татнефть» методом множественной регрессии построена функция цены на нефть с учетом реальных факторов, влияющих на ее формирование, и методом парной регрессии получена производственная функция. Построенная модель формализована как задача динамической оптимизации и исследована методами оптимального управления.

## OPTIMIZATION OF INVESTMENT INTO FIXED FUNDS OF AN OIL COMPANY

**Natalya V. Antipina**

*Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation*

### Article info

Received  
February 17, 2019

Accepted  
May 22, 2019

Available online  
June 27, 2019

### Keywords

Oil market; optimal control; multiple regression; pairwise regression; qualitative analysis

### Abstract

Oil production and processing play an important role in the economy of the Russian Federation. Companies involved in this kind of activities need specific instruments to improve their efficiency. Oil industry enterprises in Russia resemble each other in many aspects and face similar problems. Research of the Russian oil market and its main subjects allows us to consider necessity for modernization of the main oil producing funds one of the key problems of a Russian oil company. This article presents target setting for optimization of volume of investment in fixed funds of the public joint stock company «Tatneft», as well as development and a qualitative analysis of the correspondent dynamic model. Econometric methods were used to build the model. Oil price function was modeled on the basis of statistics information about the oil company using the multiple regression method and taking into account real factors which influence its formation. Production function was obtained using the pairwise regression method. The built model was formalized as a target for dynamic optimization and studied using the optimal control methods.

### Введение

Механизм ценообразования на рынке нефти подвержен влиянию множества факторов [1, с. 28–31]. Значительная доля вариации цены на нефть зависит от спроса и

предложения, но также влияние оказывает геополитическая обстановка в странах — производителях нефти [2, с. 122–126], цены на альтернативные виды топлива и доступность такого топлива, законодательные акты

в области экологии, международной торговли и др., вводимые правительствами стран, международными организациями [3; 4]. В частности, на цену российской нефти влияет цена на нефть международной марки Brent и курс доллара, являющийся индикатором изменений в положении Российской Федерации на мировой арене [1, с. 35–36].

По производственным показателям компания «Татнефть» входит в пятерку лидирующих нефтяных компаний России. Интерес к ней мотивируется тем, что это единственная российская компания, которая осуществляет проект по разработке сверхвязкой нефти, что представляется весьма перспективным на сегодняшний день.

Перечислим некоторые из множества факторов, сложившихся как на внутреннем, так и на внешнем рынке и оказывающих влияние на деятельность ПАО «Татнефть»:

- мировая и российская рыночная конъюнктура;
- спрос со стороны потребителей нефтесырья и нефтепродуктов;
- цена на нефть на международном рынке;
- стоимость транспортировки нефти и нефтепродуктов на разных территориях;
- налоговая нагрузка;
- валютные колебания [5].

В 2015 г. на мировом рынке сложилась неблагоприятная ситуация как для ПАО «Татнефть», так и для других российских производителей нефти и нефтепродуктов. Кроме того, «Татнефть» испытывала негативное влияние экономических санкций, накладываемых на Россию, которые стали причиной снижения инвестиционной активности и внутреннего спроса [6]. Для российской компании затруднен доступ к внешнему финансированию, что вкуче с падением цен на нефть приводит к сокращению многих инвестиционных программ и негативно влияет на состояние производственного фонда<sup>1</sup>.

Однако российские предприятия, в том числе ПАО «Татнефть», наращивают добычу нефти за счет введения в эксплуатацию новых месторождений и увеличения нефтеотдачи на зрелых месторождениях. Также для российской нефтяной корпорации выгодна девальвация рубля, поскольку до 90 % затрат компания несет в рублях, а доходы от экспорта получает в валюте.

Эффективность деятельности компании зависит и от налоговой системы, принятой в стране. ПАО «Татнефть» обязано выплачи-

вать в бюджет следующие основные налоги: налог на прибыль, налог на добычу полезных ископаемых (НДПИ), налог на имущество и налог на добавленную стоимость (НДС); также значительную долю в валовой прибыли занимают экспортные пошлины [7, с. 147–150].

### Постановка задачи и построение модели

Проведем построение модели в два этапа: на первом этапе на основе статистических данных получим функцию цены на нефть с помощью метода множественной регрессии [8, с. 39–90; 9, с. 42–95] и производственную функцию с помощью метода парной регрессии [8, с. 23–30; 9, с. 42–95]; на втором этапе полученные функции используем для построения задачи оптимального управления [10, с. 27–76].

### 1. Применение метода множественной регрессии для нахождения функции цены

Моделирование динамики цены на нефть рассмотрено во многих источниках (см., например: [11, с. 78–83; 12]).

Для регрессионного анализа цены тонны нефти российской марки Urals были выбраны следующие факторы:

- средняя цена нефти марки Brent;
- средняя цена доллара в рублях;
- объемы потребления нефти в России и мире;
- объемы добычи нефти в России и мире;
- разведанные запасы нефти. От этого показателя зависят ожидания участников рынка нефти (как потребителей, так и производителей), что обуславливает определенную стратегию их поведения — переход на потребление альтернативного вида топлива или применение новой, более экономичной технологии добычи нефти.

Рассмотрим динамику значений всех перечисленных факторов с 2000 по 2015 г. Количественные значения факторов представлены в табл. 1.

Примем следующие обозначения: средняя цена нефти марки Urals —  $Y$ , средняя цена нефти марки Brent —  $x_1$ , средняя цена доллара в рублях —  $x_2$ , объем потребления нефти в России —  $x_3$ , объем потребления нефти в мире —  $x_4$ , объем добычи нефти в России —  $x_5$ , объем добычи нефти в мире —  $x_6$ , разведанные запасы нефти в России —  $x_7$ , разведанные запасы нефти в мире —  $x_8$ . Построим матрицу корреляции имеющихся данных.

Коэффициенты корреляции представлены в табл. 2, из которой видно, что большинство факторов тесно связано с независимой переменной и коррелирует друг с другом.

<sup>1</sup> Statistical Review of World Energy. URL: [bp.com/en/global/corporate/energy-economics/statistical-review-of-world-energy.html](http://bp.com/en/global/corporate/energy-economics/statistical-review-of-world-energy.html).

Факторы, предположительно оказывающие влияние на цену нефти марки Urals\*

Год	Средняя цена нефти за период, дол.		Средняя цена доллара за период, р.	Объем потребления нефти, млн т		Объем добычи нефти, млн т		Разведанные запасы нефти, млрд т	
	Urals	Brent		В России	В мире	В России	В мире	В России	В мире
2000	23,94	27,39	28,14	123	3 582	327	1 519	9,3	152,9
2001	20,78	23,00	29,17	121	3 596	352	1 476	9,3	153,5
2002	21,02	22,81	31,35	122	3 640	384	1 388	9,5	156,7
2003	23,81	27,69	30,69	127	3 719	426	1 475	9,5	156,7
2004	31,02	37,66	28,81	126	3 865	463	1 588	9,9	161,9
2005	45,21	50,04	28,30	126	3 919	475	1 694	10,2	163,6
2006	56,32	58,30	27,17	130	3 959	486	1 708	10,9	164,5
2007	64,28	64,20	25,58	130	4 017	497	1 689	10,9	168,6
2008	90,68	91,48	24,86	134	3 999	494	1 746	10,8	170,8
2009	55,61	53,48	31,83	128	3 923	501	1 623	10,2	181,7
2010	74,11	71,21	30,36	134	4 042	512	1 667	10,6	188,8
2011	101,74	87,04	29,39	144	4 085	519	1 705	12,1	234,3
2012	103,14	86,46	31,08	146	4 133	526	1 779	17,8	235,8
2013	100,41	91,17	31,85	147	4 179	531	1 734	12,7	238,2
2014	69,00	85,60	38,61	148	4 211	534	1 730	14,1	239,8
2015	51,23	62,00	61,07	143	4 331	541	1 807	14,0	239,4

\* Составлена по данным: Единая межведомственная информационно-статистическая система (URL: fedstat.ru; Statistical Review of World Energy. URL: bp.com/en/global/corporate/energy-economics/statistical-review-of-world-energy.html).

Таблица 2

Матрица корреляции факторов

	Y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>
y	1								
x <sub>1</sub>	0,964 456	1							
x <sub>2</sub>	-0,036 67	0,083 394	1						
x <sub>3</sub>	0,821 646	0,870 087	0,424 123	1					
x <sub>4</sub>	0,755 811	0,848 74	0,516 048	0,889 062	1				
x <sub>5</sub>	0,777 866	0,845 553	0,335 538	0,805 981	0,951 143	1			
x <sub>6</sub>	0,786 497	0,863 664	0,322 954	0,781 427	0,915 088	0,866 353	1		
x <sub>7</sub>	0,677 24	0,689 164	0,424 747	0,854 377	0,756 817	0,662 928	0,712 46	1	
x <sub>8</sub>	0,729 515	0,763 107	0,551 88	0,964 493	0,853 314	0,748 894	0,705 573	0,848 615	1

Построим модель, включающую все независимые переменные. Получим параметры, представленные в табл. 3–5.

Полученная начальная регрессионная модель имеет вид  $Y = 266,65 + 1,19x_1 - 0,49x_2 - 1,45x_3 - 0,065x_4 + 0,105x_5 + 0,02x_6 + 1,22x_7 + 0,48x_8$ .

Проверим гипотезу об отсутствии линейной функциональной связи в модели с помощью критерия Фишера. Критическое значение критерия зависит от уровня значимости и

чисел степеней свободы. В данном случае он равен 3,75. Наблюдаемое значение критерия равно 28,23, что больше критического значения. Следовательно, гипотеза об отсутствии линейной функциональной связи в модели отклоняется.

Коэффициент детерминации равен 0,969. Таким образом, 96,9 % вариации зависимой переменной обусловлено изменениями перечисленных независимых факторов. Достаточно высокое значение коэффициента

Таблица 3

**Регрессионная статистика начальной модели зависимости цены нефти марки Urals от нескольких факторов**

Множественный R	0,984 855
R-квадрат	0,969 939
Нормированный R-квадрат	0,935 584
Стандартная ошибка	7,547 213
Наблюдения	16

Таблица 4

**Дисперсионный анализ начальной модели зависимости цены нефти марки Urals от нескольких факторов**

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	8	12 865,25	1 608,156	28,232 87	0,000 118
Остаток	7	398,723	56,960 43		
Итого	15	13 263,97			

Таблица 5

**Анализ параметров начальной модели зависимости цены нефти марки Urals от нескольких факторов**

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-значение	Нижние 95 %	Верхние 95 %	Нижние 95,0 %	Верхние 95,0 %
Y	266,653 6	198,733 8	1,341 763	0,221 564	-203,277	736,584 3	-203,277	736,584 3
x <sub>1</sub>	1,190 912	0,359 684	3,310 998	0,012 924	0,340 395	2,041 429	0,340 395	2,041 429
x <sub>2</sub>	-0,486 3	0,676 58	-0,718 76	0,495 578	-2,086 15	1,113 562	-2,086 15	1,113 562
x <sub>3</sub>	-1,449 32	1,418 55	-1,021 69	0,340 932	-4,803 66	1,905 016	-4,803 66	1,905 016
x <sub>4</sub>	-0,065 23	0,089 301	-0,730 5	0,488 807	-0,276 4	0,145 929	-0,276 4	0,145 929
x <sub>5</sub>	0,105 113	0,156 723	0,670 69	0,523 922	-0,265 48	0,475 703	-0,265 48	0,475 703
x <sub>6</sub>	0,020 359	0,064 032	0,317 942	0,759 804	-0,131 05	0,171 771	-0,131 05	0,171 771
x <sub>7</sub>	1,223 299	1,911 87	0,639 844	0,542 64	-3,297 55	5,744 152	-3,297 55	5,744 152
x <sub>8</sub>	0,481 708	0,280 957	1,714 526	0,130 15	-0,182 65	1,146 065	-0,182 65	1,146 065

детерминации свидетельствует об удовлетворительном качестве подгонки.

Оценим значимость полученных коэффициентов. Для этого вычислим критическую точку *t*-статистики с уровнем значимости 0,05 и числом степеней свободы 8. Получим  $t_{кр} = 2,36$ . Сравним полученное значение с *t*-статистикой отдельных коэффициентов.

По результатам оценки значимым является только коэффициент при  $x_1$ , остальные коэффициенты незначимы.

Исходя из полученных оценок, делаем вывод, что, несмотря на высокий коэффициент детерминации и приемлемые результаты по *F*-статистике, модель требует корректировки, поскольку восемь из девяти полученных коэффициентов при факторах незначимы. С этой целью последовательно исключаем переменные с наименьшей по модулю *t*-статистикой и на каждом этапе проверяем значимость модели и коэффициентов.

В результате получаем модель, в которой зависимая переменная зависит от единственного фактора:

$$Y = -8,05 + 1,129x_1. \quad (1)$$

Как видно из табл. 6–8, конечная модель является пригодной по критерию Фишера и коэффициенту детерминации. Коэффициент при  $x_1$  значим, так как его *t*-статистика больше критического уровня, составляющего для этой модели 2,145.

Модель представляет собой линейную зависимость между ценой нефти российской марки Urals и ценой нефти международной марки Brent. С экономической точки зрения полученные результаты также вполне оправданы, так как в рассматриваемом периоде цена нефти марки Urals определялась в соответствии с ценой на нефть марки Brent.

Однако заметим, что цена на нефть марки Brent также зависит от некоторых

Таблица 6

**Регрессионная статистика конечной модели зависимости цены нефти марки Urals от нескольких факторов**

Множественный $R$	0,964 456
$R$ -квадрат	0,930 176
Нормированный $R$ -квадрат	0,925 188
Стандартная ошибка	8,133 468
Наблюдения	16

Таблица 7

**Дисперсионный анализ конечной модели зависимости цены нефти марки Urals от нескольких факторов**

	$df$	$SS$	$MS$	$F$	Значимость $F$
Регрессия	1	12 337,83	12 337,83	186,503 6	1,75E-09
Остаток	14	926,146 3	66,153 31		
Итого	15	13 263,97			

Таблица 8

**Анализ параметров конечной модели зависимости цены нефти марки Urals от нескольких факторов**

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	$t$ -статистика	$P$ -значение	Нижние 95 %	Верхние 95 %	Нижние 95,0 %	Верхние 95,0 %
$Y$	-8,047 4	5,264 504	-1,528 62	0,148 635	-19,338 6	3,243 837	-19,338 6	3,243 837
$x_1$	1,129 35	0,082 696	13,656 63	1,75E-09	0,951 985	1,306 716	0,951 985	1,306 716

факторов, что хорошо просматривается при помощи матрицы корреляции. С этой целью проведем дополнительное исследование методом множественной регрессии на предмет зависимости между ценой нефти марки Brent и следующими факторами: объем потребления нефти в мире; объем добычи нефти в мире; разведанные запасы нефти в мире.

Их актуальность для настоящего исследования уже обоснована выше, а значения представлены в табл. 1. Очевидно, что в этом случае имеет смысл использовать только факторы, относящиеся к международному рынку нефти.

В данном случае зависимой переменной  $y$  выступает цена нефти марки Brent. Во избежание путаницы оставим обозначения остальных факторов из предыдущего случая: объем потребления нефти в мире —  $x_4$ , объем добычи нефти в мире —  $x_6$ , разведанные запасы нефти в мире —  $x_8$ .

После исключения всех незначимых по  $t$ -статистике факторов получаем следующую модель:  $y = -235,9 + 0,18x_6$ .

Как видим, эта модель также пригодна к использованию. Ее коэффициент детерминации равен 0,74, что означает, что 74 % вариации цены объясняется вариацией миро-

вой добычи нефти. Для нашей модели этот результат можно считать приемлемым, тем более что, согласно критерию Фишера, в модели присутствует линейная функциональная связь и все коэффициенты значимы по  $t$ -статистике.

Интерпретируется модель следующим образом: цена нефти марки Brent линейно зависима от фактора добычи нефти в мире. Чтобы получить модель зависимости цены нефти марки Urals от фактора добычи нефти, подставим функцию цены нефти марки Brent вместо  $x_1$  в первую полученную нами модель (1):  $p = -274,378 + 0,2E$ , где  $p$  — цена нефти марки Urals;  $E$  — мировой объем добычи нефти.

## 2. Нахождение производственной функции методом парной регрессии

Для построения динамической модели необходимо предварительно вычислить производственную функцию. Предположим, что объем производства зависит от одного фактора — количества основных производственных фондов. Таким образом, нужно построить однофакторную производственную функцию и проверить, насколько точно она отражает реальную экономическую ситуацию.

Используем метод парной линейной регрессии. Пусть  $Y$  — объем добычи нефти добывающими мощностями ПАО «Татнефть» за год,  $X$  — объем производственных фондов этого предприятия на конец каждого рассматриваемого периода (года) в натуральном выражении.

Из ежегодных отчетов ПАО «Татнефть» получена информация о значениях переменных  $X$  и  $Y$  за период с 2005 по 2015 г. (табл. 9).

На основе приведенных данных с помощью метода парной регрессии построим линейную модель, отражающую производственную функцию добывающего блока ПАО «Татнефть».

При исследовании линейной функциональной зависимости  $Y$  от  $X$  получаем следу-

ющее уравнение регрессии:  $Y = 0,0006X + 13,203$ .

На графике, представленном на рисунке, линия тренда совпадает с данным уравнением, а точки отражают распределение исследуемых данных.

Проверим, насколько точно линейное уравнение регрессии отражает реальную ситуацию. Параметры линейной регрессии представлены в табл. 10–12.

По критерию Фишера линейная связь между объемом производства и производственных мощностей существует, так как из таблицы видно, что  $F_{набл} = 33,19 > F_{кр} = 0,83$ .

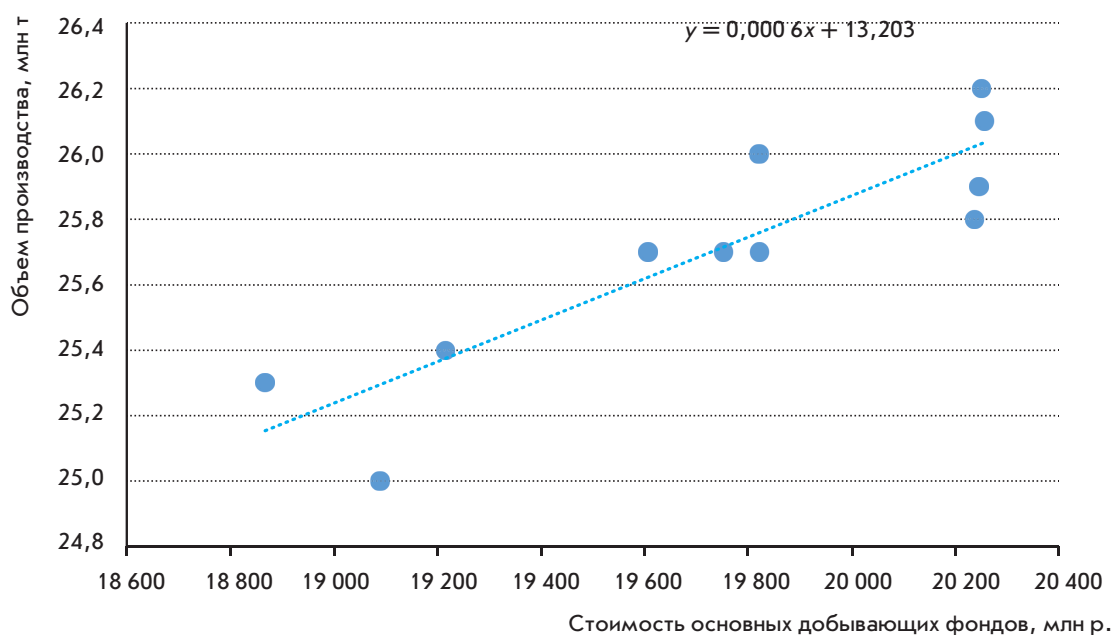
Тесноту линейной связи определим с помощью коэффициента корреляции. Он равен 0,786, что означает, что 78,6 % вариации

Таблица 9

**Динамика объема производства и количества добывающих мощностей ПАО «Татнефть» в 2005–2015 гг.\***

Год	Объем производства, млн т	Стоимость основных добывающих фондов, млн р.
2005	25,0	19 089
2006	25,3	18 867
2007	25,4	19 215
2008	25,7	19 606
2009	25,7	19 752
2010	25,7	19 822
2011	25,8	20 238
2012	25,9	20 246
2013	26,0	19 821
2014	26,1	20 257
2015	26,2	20 251

\* Составлена по данным годового отчета компании «Татнефть» по итогам за 2015 г. (URL: tatneft.ru).



**График зависимости объема производства от количества производственных мощностей с линейной линией тренда**



Таблица 10

## Регрессионная статистика линейной модели

Множественный $R$	0,886 948
$R$ -квадрат	0,786 677
Нормированный $R$ -квадрат	0,762 975
Стандартная ошибка	0,006 825
Наблюдения	11

Таблица 11

## Дисперсионный анализ линейной модели

	$df$	$SS$	$MS$	$F$	Значимость $F$
Регрессия	1	0,001 546	0,001 546	33,189 63	0,000 272
Остаток	9	0,000 419	4,66E-05		
Итого	10	0,001 965			

Таблица 12

## Анализ параметров линейной модели

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	$t$ -статистика	$P$ -значение	Нижние 95 %	Верхние 95 %	Нижние 95,0 %	Верхние 95,0 %
$Y$	13,202 57	2,174 775	6,070 776	0,000 186	8,282 889	18,122 25	8,282 889	18,122 25
$X$	0,000 633	0,000 11	5,752 412	0,000 275	0,000 384	0,000 883	0,000 384	0,000 883

объема производства объясняется вариацией выбранного нами фактора — количества производственных мощностей.

Вычислим среднюю ошибку аппроксимации, которая характеризует среднее отклонение расчетных данных от фактических. Для случая линейной модели она равна 0,75.

Также мы можем рассчитать коэффициент эластичности. Для рассматриваемого случая он равен 1,07, откуда мы делаем вывод, что при изменении количества производственных мощностей на 1 % объем производства меняется лишь на 1,07 %.

Оба коэффициента при переменных являются значимыми, так как их  $t$ -статистика (6,07 и 5,75) в обоих случаях больше критического уровня 2,3.

Как видим, линейная модель вполне пригодна для исследования.

Таким образом, производственная функция, которую мы будем использовать далее при построении модели, такова:  $Q = 0,000 6K + 13,203$ , где  $Q$  — объем производства;  $K$  — объем основных средств.

### 3. Модель оптимизации инвестиций в основные фонды

Применение математического аппарата для решения задач экономической динамики уже давно стало традиционным [10, с. 27–76; 13–19]. Для оптимизации инвестиций в основные производственные фонды ПАО

«Татнефть» используем теорию оптимального управления.

Оптимальной стратегией инвестирования предприятия «Татнефть» будем считать стратегию, которая максимизирует суммарную часть прибыли, предназначенную для выплаты дивидендов, в течение периода  $[0; T]$ . Прибыль, вложенная в инвестирование основных фондов, приведет к увеличению прибыли в будущем, что позволит выплачивать более крупные дивиденды.

Построим модель оптимизации объема инвестиций в основные фонды ПАО «Татнефть».

Пусть  $\pi(t)$  — чистая прибыль предприятия;  $u(t)$  — часть прибыли, направляемая на инвестиции и изменяющаяся в пределах  $u_0 \leq u(t) \leq u_1$ ;  $K(t)$  — объем основных фондов в стоимостном выражении, причем  $K(0) = K_0$ ;  $\mu$  — коэффициент амортизации,  $0 < \mu < 1$ .

Динамику основных фондов  $K(t)$  с течением времени описывает уравнение с начальным условием  $K(t) = -\mu K(t) + u(t)$ ,  $K(0) = K_0$ .

Отметим, что второе слагаемое в правой части уравнения способствует увеличению основных средств, а первое — их снижению за счет амортизации.

Чистую прибыль предприятия определяет формула

$$\pi(t) = pQ(t) - cQ(t) - N(t), \quad (2)$$

где  $p$  — цена на российскую нефть, сложившаяся на рынке;  $c$  — себестоимость

продукции;  $N(t)$  — налоги, выплачиваемые предприятием;  $Q(t)$  — объем продукции, который в данном случае определяется однократной производственной функцией

$$Q(t) = 0,0006K(t) + 13,203, \quad (3)$$

полученной с помощью метода парной регрессии в п. 2 статьи;  $p$  — цена, полученная в п. 1 методом множественной регрессии,

$$p = 0,2E - 274,378, \quad (4)$$

где  $E$  — мировые объемы добычи нефти.

Налоги, выплачиваемые предприятием, определяются следующим выражением:

$$N(t) = n_1(pQ(t) - cQ(t)) + n_2K(t) + n_3pQ(t) + n_4Q(t). \quad (5)$$

Здесь  $n_1$  — ставка налога на прибыль;  $n_2$  — ставка налога на имущество;  $n_3$  — ставка НДС;  $n_4$  — ставка НДСПИ.

Целью ПАО «Татнефть» является максимизация суммарной части потребляемой прибыли в течение периода  $[0; T]$  для обеспечения повышенного интереса инвесторов к ценным бумагам ПАО «Татнефть», которая математически представляет собой интеграл

Таим образом, с учетом соотношений (2)–(5) запишем следующую задачу оптимального управления:

$$J = \int_0^T (\pi(t) - u(t)) dt \rightarrow \max, \\ K(t) = -\mu K(t) + u(t), K(0) = K_0, \\ u_0 \leq u(t) \leq u_1. \quad (6)$$

Здесь  $u(t)$  — управление,  $K(t)$  — фазовая переменная, а неравенство (6) отражает ограничение на управление.

Полученная задача путем подстановки (3)–(5) в соотношение (2) преобразуется следующим образом:

$$J = \int_0^T (WK(t) + R - u(t)) dt \rightarrow \max, \\ K(t) = -\mu K(t) + u(t), K(0) = K_0, \\ u_0 \leq Ju(t) \leq Ju_1. \quad (7)$$

где  $W = 0,0006[(0,2E - 274,4)(1 - n_1 - n_3) - c(1 - n_1) - n_4] - n_2$ ,  $R = 13,203[(0,2E - 274,4)(1 - n_1 - n_3) - c(1 - n_1) - n_4]$ .

Приступим к решению задачи (7) с помощью принципа максимума [10, с. 69–81]. Сразу заметим, что эта задача линейна по управлению и фазовой переменной, так что принцип максимума является необходимым

и достаточным условием оптимальности полученного решения.

Запишем функцию Понтрягина

$$H(t, K(t), u(t), \psi(t)) = \psi(t)(-\mu K(t) + u(t)) + WK(t) + R - u(t),$$

где  $\psi(t)$  — сопряженная переменная, удовлетворяющая сопряженному уравнению

$$\dot{\psi}(t) = \mu\psi(t) - W, \psi(T) = 0. \quad (8)$$

Найдем функцию переключения

$$H_u(\psi) = \psi - 1. \quad (9)$$

Тогда, согласно принципу максимума, оптимальное управление таково:

$$u^*(\psi) = \begin{cases} u_0, & \psi < 1, \\ u_1, & \psi > 1, \\ \forall u \in [u_0, u_1], & \psi = 1. \end{cases}$$

Для нахождения управления  $u$  как функции времени  $t$  решим сопряженное уравнение (8):

$$\dot{\psi}^*(t) = \frac{W}{\mu} [1 - e^{\mu(t-T)}].$$

Подставим найденную сопряженную переменную  $\psi^*$  в функцию переключения (9) и получим непрерывную функцию времени:

$$H(t) = H(t; \psi^*(t)) = \frac{W}{\mu} (1 - e^{\mu(t-T)}) - 1. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что эта функция строго убывающая и строго вогнутая на отрезке  $[0; T]$ , поскольку

$$H(t) = -\frac{W}{\mu^2} e^{\mu(t-T)} < 0, \\ H(t) = -\frac{W}{\mu^3} e^{\mu(t-T)} < 0$$

( $W > 0, \mu > 0$  по экономическому смыслу).

Теперь заметим, что  $H(T) = -1 < 0$ . С точки зрения поиска экстремального управления далее интересно поведение функции  $H$  в правой полукрестности точки  $T$ . В связи с тем что функция (10) строго убывает и вогнута, возможны только два случая.

**Случай А:**  $H(T)$  не пересекает ось  $Ot$  ( $H(T) < 0$ ).

**Случай Б:**  $H(T)$  пересекает ось  $Ot$  в одной-единственной точке  $\tau$ .

Решая уравнение  $H(T) = 0$ , приходим к равенству

$$e^{\mu(t-T)} = \frac{W - \mu}{W}. \quad (11)$$

Ясно, что случай А реализуется, если  $W - \mu < 0$  (уравнение (11) не имеет реше-



ний). Тогда в силу  $H(T) < 0$  на отрезке  $[0; T]$  искомым управлением  $u^*(t) \equiv u_0 = \text{const}$ .

Соответствующая управлению траектория находится при  $u^*(t) \equiv u_0$  решением задачи Коши (1) [14]:

$$K(t) = \left( K_0 - \frac{u_0}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{u_0}{\mu}. \quad (12)$$

Случай Б реализуется, если  $W - \mu < 0$ , при этом уравнение (11) имеет единственное решение:

$$\tau = T + \frac{1}{\mu} \ln \left( \frac{W - \mu}{W} \right). \quad (13)$$

Отметим, что найденная точка  $\tau$  — момент переключения управления.

Таким образом, в случае Б оптимальное управление запишется в виде

$$u^*(t) = \begin{cases} u_1, & t \in [0; \tau], \\ u_0, & t \in [\tau; T]. \end{cases} \quad (14)$$

Оптимальному управлению в случае Б соответствует оптимальная траектория:

$$K^*(t) = \begin{cases} \left( K_0 - \frac{u_1}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{u_1}{\mu}, & t \in [0; \tau], \\ \left( K_\tau - \frac{u_0}{\mu} \right) e^{\mu(\tau - t)} + \frac{u_0}{\mu}, & t \in (\tau; T], \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{где } K_\tau = K(\tau) = \left( K_0 - \frac{u_1}{\mu} \right) e^{-\mu \tau} + \frac{u_1}{\mu}.$$

Подведем итог проведенному исследованию. Оптимальная стратегия инвестирования предприятия следующая: если  $W - \mu < 0$ , то оптимальное управление постоянно на про-

тяжении всего временного периода  $[0; T]$ , а соответствующая ему траектория определяется соотношением (12); если  $W - \mu > 0$ , то оптимальный процесс дается соотношениями (14) и (15), причем точка  $\tau$  определяется равенством (13).

С экономической точки зрения результаты можно интерпретировать следующим образом: предприятию следует инвестировать в основные фонды минимально возможную сумму, предназначенную для потребления, если удельная чистая прибыль (чистая прибыль на тонну нефти) не превышает коэффициента амортизации; в противном случае следует инвестировать максимально возможную часть прибыли в основные фонды до определенного момента времени  $\tau$ , после которого необходимо перейти на инвестирование минимально возможной части прибыли.

### Заключение

В связи с тенденциями современного нефтяного рынка одной из основных проблем, с которой сталкивается предприятие, занимающееся добычей нефти и желающее сохранять конкурентоспособность, является необходимость непрерывной модернизации основных добывающих фондов и приведение их к приемлемому уровню по ряду характеристик. Таким образом, управляющим предприятием приходится принимать решение о том, какая часть прибыли будет направлена на инвестиции в основные фонды. В данной статье этот вопрос рассмотрен с точки зрения построения и качественного исследования модели оптимизации инвестиций нефтяной компании «Татнефть».

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брагинский О.Б. Цены на нефть: история, прогноз, влияние на экономику / О.Б. Брагинский // Российский химический журнал. — 2008. — Т. 52, № 6. — С. 25–36.
2. Алайцева Т.В. Особенности конъюнктуры современного рынка нефти / Т.В. Алайцева // Вестник Самарского государственного университета. — 2008. — № 7. — С. 118–127.
3. Борисов Д. Основные тенденции рынка нефтепродуктов и их влияние на российский рынок / Д. Борисов, Д. Дзюба // Российский рынок нефти и нефтепродуктов: дайджест. — 2015. — С. 31–34.
4. Лазарева Н.В. Проблемы и перспективы развития нефтяной промышленности России / Н.В. Лазарева // KANT. — 2014. — № 1. — С. 44–47.
5. Завальный П. Основные риски для российской нефтегазовой отрасли как игрока мирового энергетического рынка / П. Завальный // Российский рынок нефти и нефтепродуктов: дайджест. — 2015. — С. 10–13.
6. Харина К.А. Современная конъюнктура мирового рынка нефти / К.А. Харина // РИСК: ресурсы, информация, снабжение, конкуренция. — 2011. — № 4. — С. 265–270.
7. Тенденции развития нефтегазового комплекса России / Л.В. Эдер [и др.] // Вестник Томского государственного университета. — 2013. — № 374. — С. 146–151.
8. Елисеева И.И. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева. — М.: Юрайт, 2014. — 453 с.
9. Абдуллин Р.З. Эконометрика в Microsoft Excel: учеб. пособие / Р.З. Абдуллин, В.Р. Абдуллин. — Иркутск: Изд-во БГУ, 2016. — 135 с.
10. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: учеб. пособие / Б.А. Лагоша. — М., 2004. — 133 с.
11. Варшавский Л.Е. Моделирование динамики цены на нефть при разных режимах развития рынка нефти / Л.Е. Варшавский // Прикладная эконометрика. — 2009. — № 1 (13). — С. 70–88.

12. Modelling the World Oil Market: Assessment of a Quarterly Econometric Model / S. Dees [et al.] // *Energy Policy*. — 2007. — Vol. 35, iss. 1. — P. 178–191. — DOI: 10.1016/j.enpol.2005.10.017.

13. Ливандовская А.Д. Экономика и математика: их взаимодействие / А.Д. Ливандовская // *Вестник Тихоокеанского государственного экономического университета*. — 2008. — № 4. — С. 90–98.

14. Аксеньюшкина Е.В. Анализ налогообложения по кадастровой стоимости и определение оптимальной стратегии поведения государства с использованием аппарата теории игр / Е.В. Аксеньюшкина, П.Г. Сорокина // *Вестник Бурятского государственного университета. Экономика и менеджмент*. — 2018. — № 3. — С. 3–15.

15. Волченко Л.Ю. Моделирование влияния деятельности таможенных органов на социально-экономическое развитие и инвестиционную активность регионов / Л.Ю. Волченко, Н.В. Мамонова, Е.О. Завьялова // *Инновационное развитие экономики*. — 2017. — № 6 (42). — С. 16–26.

16. Баенхаева А.В. Исследование оптимального импульсного управления в модели рекламных расходов / А.В. Баенхаева // *Вестник Бурятского государственного университета*. — 2009. — № 9. — С. 18–21.

17. Аксеньюшкина Е.В. Нахождение оптимальной инвестиционной стратегии финансовой организации [Электронный ресурс] / Е.В. Аксеньюшкина // *Baikal Research Journal*. — 2017. — Т. 8, № 4. — Режим доступа: <http://brj-bguer.ru/reader/article.aspx?id=21904>. — DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(4).16.

18. Сорокина П.Г. Моделирование налоговой базы по налогу на имущество организаций и прогнозирование поступлений на примере Иркутской области / П.Г. Сорокина, О.В. Леонова, Л.Ю. Волченко // *Вестник УрФУ. Сер.: Экономика и управление*. — 2018. — Т. 17, № 2. — С. 310–328. — DOI: 10.15826/vestnik.2018.17.2.014.

19. Шуплецов А.Ф. Моделирование оптимальной стратегии развития предпринимательской деятельности промышленной компании на основе эффективного использования потенциала нематериальных ресурсов / А.Ф. Шуплецов, П.В. Харитонова // *Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права)*. — 2013. — Т. 8, № 6. — С. 8–14.

## REFERENCES

1. Braginsky O.B. Crude Oil Prices: Retrospective, Forecast and Influence on the Economy. *Rossiiskii khimicheskii zhurnal = Russian Chemical Journal*, 2008, vol. 52, no. 6, pp. 25–36. (In Russian).

2. Alaytseva T.V. Features of a Conjunction of a Modern Oil Market. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta = Vestnik of Samara State University*, 2008, no. 7, pp. 118–127. (In Russian).

3. Borisov D., Dzyuba D. The Main Trends of the Oil Refinery Products Market and Their Influence on the Russian Market. *Rossiiskii rynek nefiti i nefteproduktov. Daidzhest = The Russian Oil and Oil Refinery Products Market. Digest*, 2015, pp. 31–34. (In Russian).

4. Lazareva N.V. Problems and Prospects of Development of the Russian Oil Industry. *KANT*, 2014, no. 1, pp. 44–47. (In Russian).

5. Zaval'nyi P. The Main Risks for the Russian Oil and Gas Industry as a World Energy Market Player. *Rossiiskii rynek nefiti i nefteproduktov. Daidzhest = The Russian Oil and Oil Refinery Products Market. Digest*, 2015, pp. 10–13. (In Russian).

6. Kharina K.A. The Current State of the World Oil Market. *RISK: resursy, informatsiya, snabzhenie, konkurenciya = RISC: Resources, Information, Supply, Competition*, 2011, no. 4, pp. 265–270. (In Russian).

7. Eder L.V., Filimonova I.V., Mochalov R.A., Mironositsky A.V. Tendencies of Development of Oil and Gas Complex of Russia. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University Journal*, 2013, no. 374, pp. 146–151. (In Russian).

8. Eliseeva I.I. *Ekonometrika [Econometrics]*. Moscow, Yurait Publ., 2014. 453 p.

9. Abdullin R.Z., Abdullin V.R. *Ekonometrika v Microsoft Excel [Econometrics in Microsoft Excel]*. Irkutsk, Baikal State University Publ., 2016. 135 p.

10. Lagosha B.A. *Optimal'noe upravlenie v ekonomike [Optimal Control in Economics]*. Moscow, 2004. 133 p.

11. Varshavsky L. Modeling Dynamics of Oil Prices under Different Regimes of Oil Market Development. *Prikladnaya ekonometrika = Applied econometrics*, 2009, no. 1, pp. 70–88. (In Russian).

12. Dees S., Caradeloglou P., Kaufmann R.K., Sanchez M. Modelling the World Oil Market: Assessment of a Quarterly Econometric Model. *Energy Policy*, 2007, vol. 35, iss. 1, pp. 178–191. DOI: 10.1016/j.enpol.2005.10.017.

13. Livandovskaya A.D. Economics and Mathematics: their interaction. *Vestnik Tikhookeanskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta = Bulletin of the Pacific State University of Economics*, 2008, no. 4, pp. 90–98. (In Russian).

14. Aksenyushkina E.V., Sorokina P.G. Analysis of Taxation by Cadastral Value and Determination of the Optimal Strategy of State Behavior Using the Machinery of Game Theory. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Ekonomika i menedzhment = Bulletin of the Buryat State University. Economics and Management*, 2018, no. 3, pp. 3–15. (In Russian).

15. Volchenko L.Yu., Mamonova N.V., Zav'yalova E.O. Modeling of the Customs Activities Influence on the Social and Economic Development and Investment Activities of the Regions. *Innovatsionnoe razvitie ekonomiki = Innovative Development of Economy Journal*, 2017, no. 6 (42), pp. 16–26. (In Russian).

16. Baenkhayeva A.V. The Research of Optimal Impulsive Control in the Model of Advertising Expenditure. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of the Buryat State University*, 2009, no. 9, pp. 18–21. (In Russian).

17. Aksenyushkina Ye.V. Finding an optimal investment strategy of financial institution. *Baikal Research Journal*, 2017, vol. 8, no. 4. Available at: <http://brj-bguer.ru/reader/article.aspx?id=21904>. DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(4).16. (In Russian).

18. Sorokina P.G., Leonova O.V., Volchenko L.Yu. Modeling of the Tax Base for Property Tax and Income Forecasting for the Irkutsk Region. *Vestnik UrFU. Seriya: Ekonomika i upravlenie = Bulletin of Ural Federal University. Series: Economics and Management*, 2018, vol. 17, no. 2, pp. 310–328. DOI: 10.15826/vestnik.2018.17.2.014 (In Russian).

19. Shupletsov A.F., Kharitonova P.V. Modeling an Optimal Strategy of Company Business Development on the Basis of Efficient Utilization of non-Tangible Resources. *Izvestiya Irkutskoi gosudarstvennoi ekonomicheskoi akademii (Baikalskii gosudarstvennyi universitet ekonomiki i prava) = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy (Baikal State University of Economics and Law)*, 2013, vol. 8, no. 6, pp. 8–14. (In Russian).

#### **Информация об авторе**

Антипина Наталья Валерьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и информатики, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: natant2012@mail.ru.

#### **Author**

Natalya V. Antipina — Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Informatics, Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: natant2012@mail.ru.

#### **Для цитирования**

Антипина Н.В. Оптимизация инвестиций в основные фонды нефтяной компании / Н.В. Антипина // Известия Байкальского государственного университета. — 2019. — Т. 29, № 2. — С. 262–272. — DOI: 10.17150/2500-2759.2019.29(2).262-272.

#### **For Citation**

Antipina N.V. Optimization of Investment into Fixed Funds of an Oil Company. *Izvestiya Baikalskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2019, vol. 29, no. 2, pp. 262–272. DOI: 10.17150/2500-2759.2019.29(2).262-272. (In Russian).